

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

β. Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

δ. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f δεν έχει ακρότατα στο (α, β) .

ε. Η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

στ. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(x) = (x-1)^2(x-2)$$

τότε η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα.

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - 5x, \quad x \in \mathbb{R}$

β. $f(x) = 10 - 4x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

γ. $f(x) = \varepsilon\phi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{1}{x-5}, \quad x \neq 5, \quad x \in \mathbb{R}$

β. $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2, \quad x \in \mathbb{R}$

γ. $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

5. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις που βρίσκονται στη στήλη Α με τα διαστήματα που βρίσκονται στη στήλη Β, ώστε κάθε συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα στο αντίστοιχο διάστημα, αν υπάρχει τέτοιο.

Στήλη Α Συναρτήσεις	Στήλη Β Διαστήματα
1. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$	A. $(0, +\infty)$
2. $f(x) = x \cdot \ln x, \quad x > 0$	B. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$
3. $f(x) = e^{x^2+2}, \quad x \in \mathbb{R}$	Γ. Δεν υπάρχει τέτοιο διάστημα
4. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$	Δ. $(0, 1)$
	E. $(1, +\infty)$
	ΣΤ. $(-\infty, e)$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

6. Να μελετήσετε ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα** τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + 5 + \frac{25}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$

β. $f(x) = \frac{1}{1 + \eta \mu x}, \quad x \in [0, \pi)$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = -2$, τότε:

i. $\alpha = -2, \quad \beta = 3$

ii. $\alpha = 2, \quad \beta = 3$

iii. $\alpha = -1, \quad \beta = 3$

iv. $\alpha = 4, \quad \beta = 3$

8. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 - 6x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

$$\phi(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = x \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

επιλέγοντας τη σωστή απάντηση

i. $\alpha_f < \alpha_g < \alpha_h < \alpha_\phi$

ii. $\alpha_f < \alpha_h < \alpha_\phi < \alpha_g$

iii. $\alpha_f < \alpha_h < \alpha_g < \alpha_\phi$

iv. $\alpha_h < \alpha_f < \alpha_\phi < \alpha_g$

9. Ένας κατασκευαστής εκτιμά ότι το κόστος παραγωγής q μονάδων ενός προϊόντος είναι:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$

Να βρείτε πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να κατασκευάζει ώστε το μέσο κόστος:

$$A(q) = \frac{C(q)}{q}$$

να είναι ελάχιστο.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x, \quad x \geq 0$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι:

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{για κάθε } x > 0$$