

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

A. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή:

$$\lambda = f'(x_0)$$

Γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση f , δέχεται εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Δ. Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $f'(x_0) = g'(x_0)$ τότε οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση από τις προτεινόμενες σε κάθε περίπτωση

α. Αν $f(x) = x^5$, τότε:

i. $f'(5) = 5^5$

ii. $f'(5) = 5^4$

iii. $f'(5) = 5$

iv. $f'(1) = 1$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0) \neq 0$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' =$$

i. $\frac{1}{f'(x_0)}$

ii. $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

iii. $-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

iv. $-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

γ. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε:

i. $f'(0) = 0$

ii. $f'(0) = 1$

iii. $f'(0) = \frac{1}{2}$

iv. Δεν ορίζεται το $f'(0)$

δ. Αν είναι $f(x) = e^{\eta \mu x}$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:

i. $f'(x) = e^{\eta \mu x}$

ii. $f'(x) = -\sigma \upsilon \nu x \cdot e^{\eta \mu x}$

iii. $f'(x) = \sigma \upsilon \nu x \cdot f(x)$

iv. $f'(x) = (\sigma \upsilon \nu x + 1) \cdot e^x$

ε. Αν είναι $f(x) = \ln \sqrt{x}$ με $x > 0$, τότε ισχύει:

$$f'(x) =$$

i. $\frac{1}{\sqrt{x}}$

ii. $\frac{1}{2x}$

iii. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

iv. $2\sqrt{x}$

3. Να συμπληρώσετε τις ισότητες ώστε να προκύπτουν οι κανόνες παραγώγισης:

α. $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$

β. $(f(x) + g(x))' = \dots\dots\dots$

γ. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

δ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dots\dots\dots$

ε. $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \dots\dots\dots$

στ. $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

4. Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α $f(x)$	Στήλη Β $f'(x)$
1. $x^2 + 3x + 1$	Α. $e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$
2. $\frac{x^2 + 1}{x}$	Β. $e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$
3. $e^x \cdot \eta \mu x$	Γ. $e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$
4. $e^x \cdot \ln x$	Δ. $e^x (\ln x + 1)$
5. $\frac{e^x}{x}$	Ε. $\frac{e^x}{x^2}$
	ΣΤ. $1 - \frac{1}{x^2}$
	Ζ. $2x + 3$

5. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$

β. $f(x) = \frac{x^3 + 10x + 7}{x}, \quad x \neq 0$

γ. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5 \ln x, \quad x > 0$

δ. $f(x) = 10e^x + 35\sqrt{x} + \ln 10, \quad x \geq 0$

6. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

β. $f(x) = 500(15 - x^2)(3x - 2)$

γ. $f(x) = x^5 \cdot e^x$

δ. $f(x) = (x^2 + 1) \ln x, \quad x > 0$

7. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

β. $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$

γ. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \neq 2$

δ. $g(x) = \frac{t^2+1}{1-t^2}, \quad t \neq 1, -1$

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

8. Κινητό Α κινείται στον ημιάξονα Ox με θετική φορά και θέση που δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 5t \quad (x \text{ σε cm, } t \text{ σε sec})$$

Κινητό Β κινείται στον ημιάξονα Oy με θετική φορά και θέση που δίνεται από τον τύπο:

$$y(t) = 3t^2 \quad (y \text{ σε cm, } t \text{ σε sec})$$

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει πλευρές τις OA και OB τη χρονική στιγμή $t = 2\text{sec}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

A. Να βρείτε επιλέγοντας την σωστή απάντηση:

α. Το πεδίο ορισμού της

i. $A = \mathbb{R}$

ii. $A = \mathbb{R}^*$

iii. $A = (0, +\infty)$

iv. $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

β. Την $f'(x)$

i. $f'(x) = \frac{1}{e^x}$

ii. $f'(x) = \frac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

iii. $f'(x) = \frac{e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

iv. $f'(x) = \frac{e^x - 1 + x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

B. Η γραφική παράσταση C_f της f , δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$, στο σημείο της με τετμημένη:

i. $x = 1$

ii. $x = 0$

iii. $x = e$

iv. Σε κανένα από τα προτεινόμενα σημεία.

