

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΕΡΟΣ Β - ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κατανόησης - σχετικά εύκολες

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \ln(x+3)$

είναι το διάστημα: $A = [-3, +\infty)$

β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \ln(e^x - e)$

είναι το διάστημα: $A = [1, +\infty)$

γ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{\log(x-2)}$

είναι το διάστημα: $A = [2, +\infty)$

δ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2+1}{|x-1|}$

είναι το σύνολο: $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

ε. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x}{|x|}$

είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$

ζ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x-1 |x-1|$

είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=1$

η. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{3}{x}$

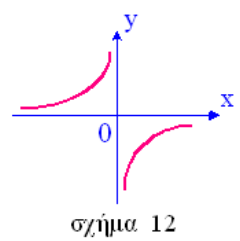
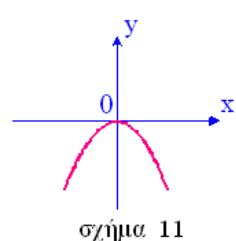
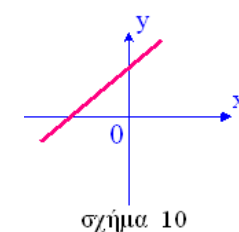
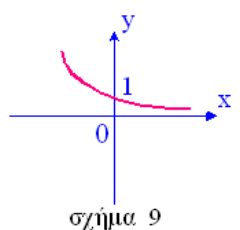
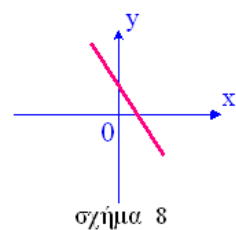
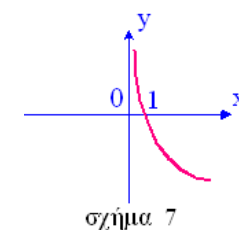
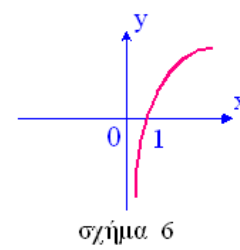
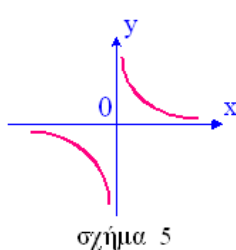
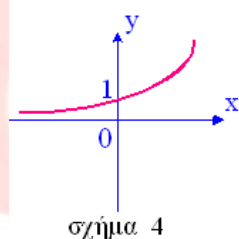
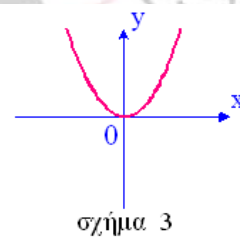
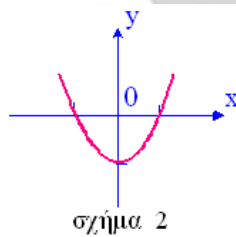
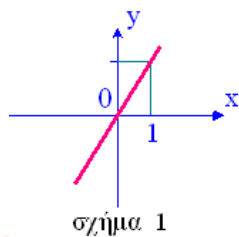
παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

- θ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x - 2^2$ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
- ι. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = |\alpha x + \beta|$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- κ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: A \rightarrow B$, είναι το σύνολο των σημείων M , των οποίων οι συντεταγμένες x, y , ικανοποιούν την εξίσωση:

$$y = f(x)$$

- λ. Η ισότητα: $\log x^k = k \log x$ ισχύει για κάθε $x > 0$

2. Κάθε μια από τις εξισώσεις που υπάρχουν στη στήλη Α του πίνακα, αντιστοιχίστε την στο σχήμα της στήλης Β. Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων, εμφανίζονται στα παρακάτω σχήματα:



Πίνακας αντιστοίχισης

Στήλη Α εξισώσεις	Στήλη Β γραφικές παραστάσεις
1. $y = x + 3$	α. σχήμα 1
2. $y = -2x + 1$	β. σχήμα 2
3. $y = 2x$	γ. σχήμα 3
4. $y = 3x^2$	δ. σχήμα 4
5. $y = -x^2$	ε. σχήμα 5
6. $y = x^2 - 1$	ζ. σχήμα 6
7. $y = \frac{1}{x}$	η. σχήμα 7
8. $y = -\frac{2}{x}$	θ. σχήμα 8
9. $y = 2^x$	ι. σχήμα 9
10. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	κ. σχήμα 10
11. $y = \log_2 x$	λ. σχήμα 11
12. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$	μ. σχήμα 12

Εφαρμογής - μέτριας δυσκολίας

3. Για τις συναρτήσεις: $f(x) = \frac{2\alpha x - \alpha + 1}{x + \alpha + 2}$, $g(x) = \frac{\alpha^2 - 3x - 2\alpha + 4}{x + 2\alpha - 1}$

Ισχύει $f(x) = g(x)$ και έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $g(x) = \frac{\sqrt{12-x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x+4}}$

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{\ln e^x - 1}{\log \log x}$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

6. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{3}{|x-3|}, \quad x \neq 3$$

7. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} - 1, \quad x \neq 0$$

8. Να βρεθεί για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

είναι μη αρνητική.

9. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 + 3x - 1$, είναι πάνω από τα σημεία της γραφικής παράστασης της

$g(x) = x - 1$

10. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $g \circ f$

ii) $f \circ g$.

Ανάλυσης και εφαρμογής - αυξημένης δυσκολίας

11. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x|x|$$

12. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = |\alpha x + \beta|, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

13. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{με } x \leq 0 \\ \frac{2}{x} & \text{με } x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{με } x > 2 \\ x^2 - 4 & \text{με } x \leq 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

14. Αν ισχύουν:

$$g(x) = -2x + 5 / \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = -6x + 17 / \mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος της f .

15. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση όχι σταθερή και ισχύει:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Δείξτε ότι:

α. $f(0) = 1$, β. $f(-x) = f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

γ. Αν $f(p) = 0$, τότε ισχύει $f(x+4p) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

16. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(8-3x) + f(x) = 2g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχουν κοινό σημείο
- β. Αν ισχύει $f(2-x) + 2f(x) = 2x - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g καθώς και το κοινό σημείο.

