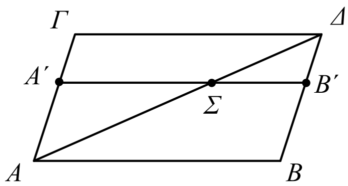
1 *ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ*

Εισαγωγή

Το διάνυσμα είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που αναπτύχθηκε μέσα από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής. Ο “κανόνας του παραλληλόγραμμου”, σύμφωνα με τον οποίο το μέτρο και η κατεύθυνση δύο δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα εκφράζονται από τη διαγώνιο του παραλληλόγραμμου που σχηματίζουν, ήταν γνωστός με διάφορες μορφές στους Αρχαίους Έλληνες επιστήμονες. Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, για παράδειγμα, στο έργο του “Μηχανικά” αποδεικνύει με χρήση αναλογιών την ακόλουθη γεωμετρική πρόταση:

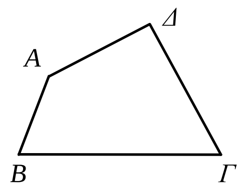
Αν ένα σημείο Σ κινείται με ομαλή κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας AB, ενώ συγχρόνως η AB κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της με το άκρο A να διαγράφει μια ευθεία $A\Gamma$, τότε η πραγματική τροχιά του Σ (η “συνισταμένη κίνηση”) θα είναι η διαγώνιος $A\Delta$ του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$.



Αυτός ο “κανόνας” χρησιμοποιήθηκε πολλούς αιώνες για το γεωμετρικό προσδιορισμό της συνισταμένης, χωρίς όμως να θεωρείται ένα νέο είδος πρόσθεσης ευθυγράμμων τμημάτων, διαφορετικό από εκείνο που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για να γίνει αυτό, χρειάστηκε από τη μια μεριά η αποδοχή και συστηματική χρήση των αρνητικών αριθμών στα Μαθηματικά και από την άλλη η μελέτη φυσικών ποσοτήτων όπως η ταχύτητα, η δύναμη, η ορμή και η επιτάχυνση, που χαρακτηρίζονται τόσο από το μέτρο όσο και από τη διεύθυνσή τους. Αυτές οι εξελίξεις έφεραν στο προσκήνιο τις έννοιες της προσανατολισμένης κίνησης και του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος, τις πρώτες ιδέες των οποίων συναντάμε σε έργα επιστημόνων του 17ου αιώνα όπως οι J. Wallis, I. Newton και G.W. Leibniz.

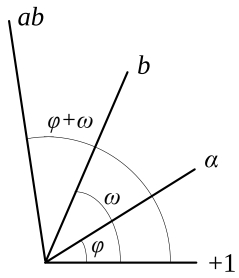
Η ανάπτυξη ενός συστηματικού λογισμού με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα άρχισε στα τέλη του 18ου αιώνα, για να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία στους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και για να βρεθεί ένας τρόπος αναλυτικής έκφρασης του μήκους και της διεύθυνσης των ευθύγραμμων τμημάτων. Πρωτοποριακό υπήρξε προς αυτή την κατεύθυνση το έργο των C. Wessel (1799) και R. Argand (1806). Ξεκινώντας από την απλή περίπτωση των προσανατολισμένων τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, προχώρησαν στον ορισμό των πράξεων με τυχαία τμήματα του επιπέδου. Συγκεκριμένα, οι ορισμοί του Wessel ήταν οι εξής:

Το άθροισμα διαδοχικών προσανατολισμένων τμημάτων είναι το τμήμα που ενώνει την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου.



ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ

Το γινόμενο δύο προσανατολισμένων τμημάτων που σχηματίζουν γωνίες φ και ω αντιστοίχως με ένα μοναδιαίο τμήμα, είναι το τμήμα που έχει μήκος το γινόμενο των μηκών των δύο τμημάτων και σχηματίζει γωνία φ+ω με το μοναδιαίο τμήμα.



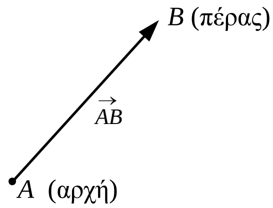
Στις εργασίες των Wessel και Argand (και ορισμένες άλλες που δημοσιεύτηκαν εκείνη την εποχή) υπάρχουν οι βασικές ιδέες που συγκροτούν σήμερα το Διανυσματικό Λογισμό του επιπέδου. Η ουσιαστική ανάπτυξη του κλάδου αρχίζει όμως μερικές δεκαετίες αργότερα, όταν επιχειρείται η γενίκευση αυτών των ιδεών στον τρισδιάστατο χώρο και η θεμελίωση μιας γενικής μαθηματικής θεωρίας. Καθοριστικό υπήρξε προς αυτήν την κατεύθυνση του έργο του W. Hamilton (1843) και του H. Grassmann (1844). Ο W. Hamilton χρησιμοποίησε τον όρο διάνυσμα (vector). Ο όρος vector προέρχεται κατά μία εκδοχή από το λατινικό ρήμα “vehere” που σημαίνει μεταφέρω. Ο H. Grassmann χρησιμοποίησε τους όρους **εσωτερικό** και **εξωτερικό γινόμενο**.
Η παραπέρα εξέλιξη του Διανυσματικού Λογισμού επηρεάστηκε αποφασιστικά από τις εξελίξεις στη Φυσική κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Η χρήση της θεωρίας του Hamilton από τον ιδρυτή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας J.C. Maxwell (1873) οδήγησε σε ορισμένες τροποποιήσεις, με βάση τις οποίες οι φυσικοί J.W. Gibbs και O. Heaviside δημιούργησαν στις αρχές της δεκαετίας του 1880 τη σύγχρονη θεωρία του Διανυσματικού Λογισμού (στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται σ’ αυτό το κεφάλαιο). Τέλος το 1888, ο G. Peano, με βάση τη θεωρία του Grassmann θεμελίωσε αξιωματικά την έννοια του διανυσματικού χώρου.

1.1 *Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ*

Ορισμός του Διανύσματος

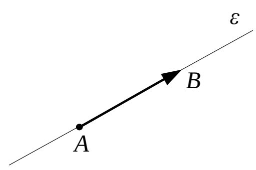
Υπάρχουν μεγέθη, όπως είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ., τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**.
Υπάρχουν όμως και μεγέθη, όπως είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ., που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη ή απλώς **διανύσματα**.

- Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται



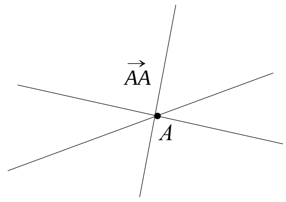
με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B.
Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.
Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος· για παράδειγμα, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta},...,\vec{u},\vec{v},...$

- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.



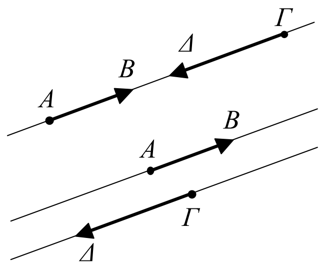
- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\overrightarrow{AB}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



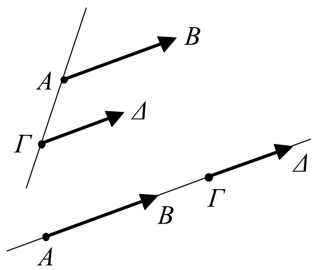
Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\overrightarrow{AB} /\!/ \zeta$.

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

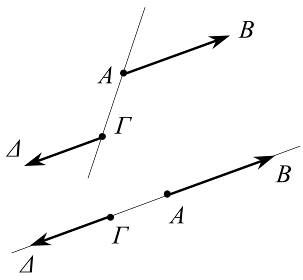


Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα:

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:
α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $A\Gamma$ που ενώνει τις αρχές τους ή
β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}}$.

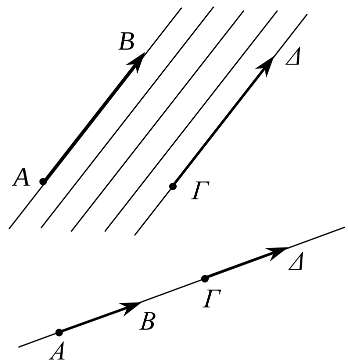


— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$.



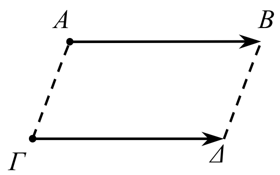
Ίσα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

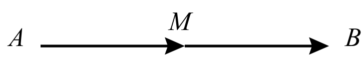


Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



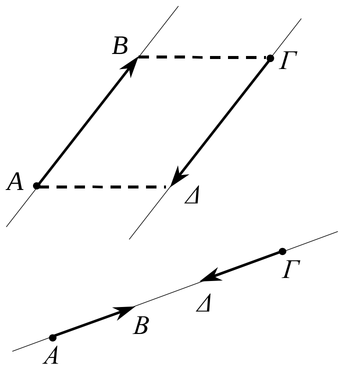
- Αν M είναι το μέσον του AB, τότε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



Αντίθετα Διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ ή } \overrightarrow{\Gamma\Delta}=-\overrightarrow{AB}.$$



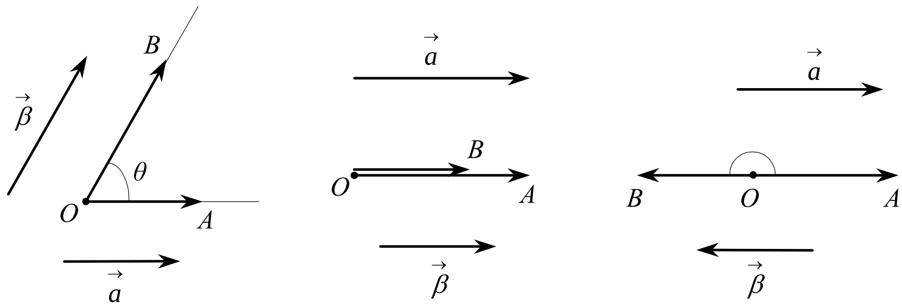
Είναι φανερό ότι

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Ειδικότερα, έχουμε $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}}$.

Γωνία δύο Διανυσμάτων

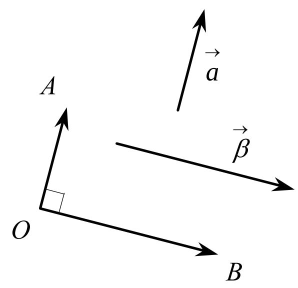
Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία $\hat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων** $\boldsymbol{\vec{\alpha}}$ **και** $\boldsymbol{\vec{\beta}}$ και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}$ ή $\boldsymbol{(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})}$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα $\boldsymbol{\theta}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O. Είναι φανερό επίσης ότι $\boldsymbol{0^0 \leq \theta \leq 180^0}$ ή σε ακτίνια $\boldsymbol{0 \leq \theta \leq \pi}$ και ειδικότερα:

- $\theta=0$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.
- $\theta=\pi$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.



Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \le \theta \le \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω *Μ* το μέσο της πλευράς *ΑΓ* ενός τριγώνου *ΑΒΓ*. Με αρχή το *Μ* γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το *Α* είναι το μέσο του *ΔΕ*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AE}$. Πράγματι, επειδή $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, είναι

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} \qquad (1)$$

Όμως το *Μ* είναι μέσο του *ΑΓ*. Άρα,

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{AM} \qquad (2)$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), έχουμε $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AM}$, οπότε:

$$\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{BM} \qquad (3)$$

Επειδή επιπλέον $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$, έχουμε

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BM} \qquad (4)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AE}$. ■