1 *ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*

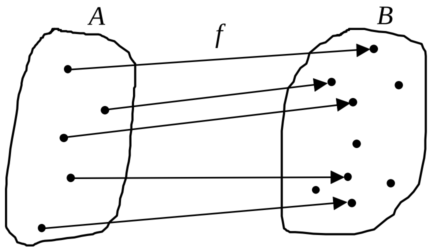
Εισαγωγή

Στο χώρο της επιστήμης το 17ο αιώνα κυριαρχούσε η μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, καθώς και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος πάνω ή κοντά στη Γη. Στη μελέτη αυτή προφανώς σημαντικό ρόλο έπαιζε ο προσδιορισμός του μέτρου της ταχύτητας και της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν η θέση του σώματος μια χρονική στιγμή t εκφράζεται με τη συνάρτηση $x = f(t)$, τότε ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t ανάγεται στον προσδιορισμό *του ρυθμού μεταβολής* της $x = f(t)$ ως προς t ή, όπως ονομάστηκε αργότερα, *της παραγώγου της* $x = f(t)$. Έτσι, προβλήματα σχετικά με την κίνηση ενός σώματος, καθώς και άλλα που θα συναντήσουμε αργότερα, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), οι οποίοι εισήγαγαν τη γενική έννοια της “παραγώγου” και του “διαφορικού”, βελτίωσαν τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού και τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Γεωμετρίας και της Μηχανικής. Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δε σταμάτησε το 17ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε το 18ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή των αδελφών Jacob Bernoulli (1654-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), του Euler (1707-1783), κορυφαίου μαθηματικού της εποχής, του Lagrange (1736-1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα όπως του Bolzano (1781-1848), του Cauchy (1789-1857) και του Weierstrass (1815-1897).

1.1 *ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ*

Ορισμός Συνάρτησης

Είδαμε σε προηγούμενες τάξεις ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου *Α* αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου *Β*.



1

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο *A*, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *B* συμπίπτει με το *R*. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα *f, g, h, φ, σ* κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε "*y* ίσον *f* του *x*". Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *A*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, για παράδειγμα $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Σ'αυτή την περίπτωση λέμε: "η συνάρτηση *f* με $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$" ή "η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$" ή "η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - x^2}$" ή, απλούστερα, "η συνάρτηση $\sqrt{1 - x^2}$".

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του *R* στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1 - x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1, 1]$, η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbf{R} - \{2\}$, δηλαδή το **R** χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα *f* για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα *x* και *y* για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ και $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x + 1$, τότε

$$S(x) = x^2 - 1 + x + 1 = x(x+1)$$

$$D(x) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$$

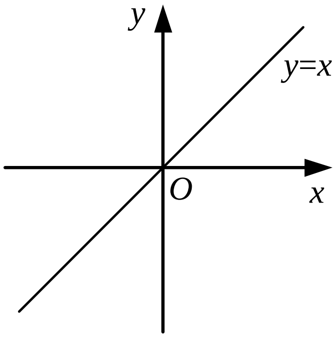
$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1, \quad \text{όπου} \quad x \neq -1.$$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

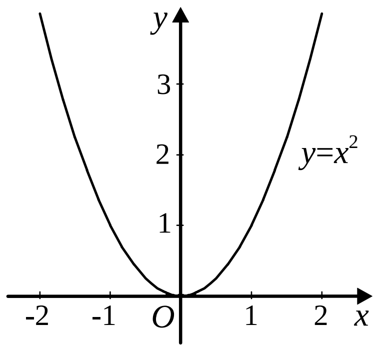
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y = f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της** $\boldsymbol{f}$.

Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

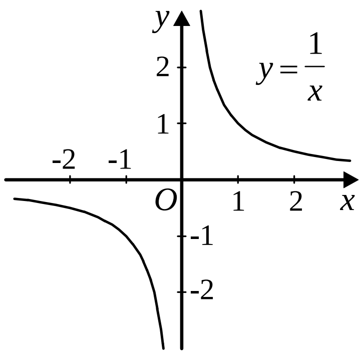
2



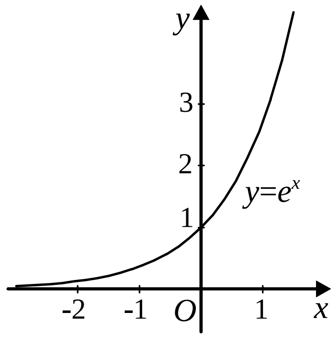
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



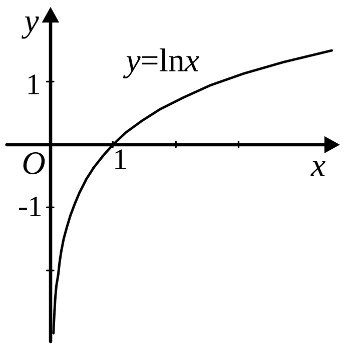
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια *παραβολή*.



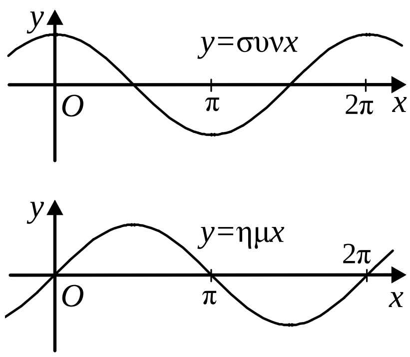
(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι "πάνω" από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι "δεξιά" του άξονα yy', αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.

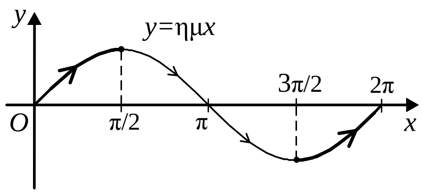


(στ) Οι συναρτήσεις $f(x) = \text{ημ}x$ και $g(x) = \text{συν}x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ υπάρχει μια διακοπή στο σημείο $x=0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

3



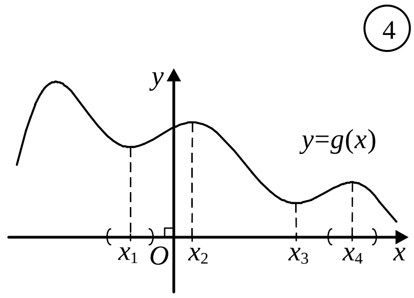
- Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\text{ημ}x$, $x\in[0,\,2\pi]$ προκύπτει αμέσως ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ είναι $\text{ημ}x_1<\text{ημ}x_2$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Το ίδιο συμβαίνει και στο διάστημα $\left[\dfrac{3\pi}{2},\,2\pi\right]$. Όμως για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, παρατηρούμε ότι $\text{ημ}x_1>\text{ημ}x_2$. Λέμε σ'αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Γενικά:

> Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

- Ακόμη, για την παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι για κάθε

$x \in [0,\ 2\pi]$ είναι $\eta\mu x \leq 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x \geq -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$. Δηλαδή, όπως λέμε, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει *ολικό μέγιστο* (maximum) για $x = \frac{\pi}{2}$ και *ολικό ελάχιστο* (minimum) για $x = \frac{3\pi}{2}$.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του σχήματος 4 προκύπτει ότι για $x = x_1$ η τιμή της g είναι μικρότερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_1 *τοπικό ελάχιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_3$. Οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_3)$ λέγονται *τοπικά ελάχιστα* της συνάρτησης. Επίσης, για $x = x_4$ η τιμή $g(x_4)$ είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του x_4. Λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_4 *τοπικό μέγιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_2$. Οι τιμές $g(x_2)$ και $g(x_4)$ λέγονται *τοπικά μέγιστα* της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο $g(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $g(x_4)$.

Γενικά:

> Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:
> **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Όριο Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

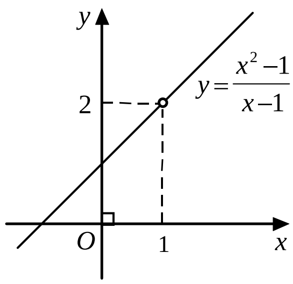
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο 1.

$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

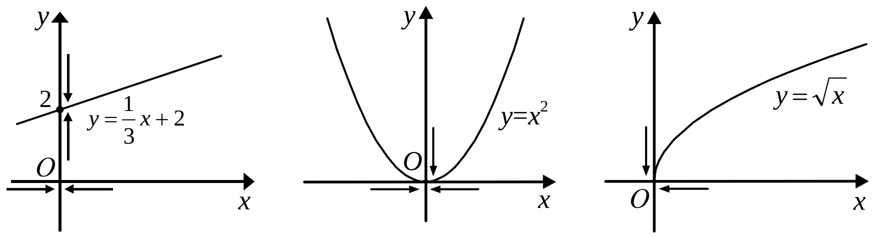
5



οπότε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x \to 1)$, τότε το $f(x)=x+1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x+1 \to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x+2$, που είναι ορισμένη στο R. Παρατηρούμε ότι όταν $x \to 0$, το $f(x) \to 2$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$. Ομοίως, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

6



(α) (β) (γ)

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1 \ell_2$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^\nu = \ell_1^\nu$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$.

Έτσι, για παράδειγμα, για την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 9$ έχουμε $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 3x - 9) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 9 = 4 + 6 - 9 = 1$.

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 9$ ισχύει $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Γενικά **μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$**.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x+5}{4x}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 8} \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1} \right)$ **iii)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x+3}$.

ΛΥΣΗ

i) $\lim_{x\to 5}\frac{3x+5}{4x}=\frac{3\cdot 5+5}{4\cdot 5}=\frac{20}{20}=1$

ii) $\lim_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)=\sqrt{8-4}+\sqrt{8+1}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$

iii) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-3)=-6$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=x^3-3x$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$.

2. Αν $\varphi(t)=t^2-5t+6$, να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t)=0$;

3. Αν $h(\theta)=\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta\in[0,\ 2\pi]$ είναι $h(\theta)=0$;

4. Αν $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$;

6. Για ποιες τιμές του x είναι αρνητική η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-7)$; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma(x)=\sqrt{(x-3)(x-7)}$;

7. Αν $f(x)=3x^2-2x-1$ και $g(x)=2x-1$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+4)$ ii) $\lim\limits_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]$ iii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)$ v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

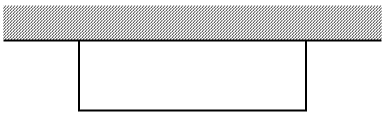
i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3(x-2)}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2}{x^2+1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x]$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ v) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)=1$.

2. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι *x*, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του *x*.



3. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλυτζάνι έχει ύψος *h* cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του *h*. Αν η ακτίνα της βάσης του είναι *r*, να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του *r*.

4. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=A\Gamma=10$. Αν $A\hat{B}\Gamma=\theta$, να εκφράσετε το ύψος υ του τριγώνου από την κορυφή *Β*, καθώς και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του θ.

5. Να δείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\dfrac{1}{2}$.