1.1 Γραμμικά συστήματα

Μεθοδολογία & Λυμένες Ασκήσεις

Στόχος 1 : Να μπορούν να βρίσκουν σημεία που είναι λύσεις μιας εξίσωσης.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η γραμμική εξίσωση $2x - 3y = 8$.

α) Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(4,0)$ *και* $(-1,10)$ αποτελούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να βρείτε τη μορφή των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης.

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση $3x - 5y = \alpha$. Να βρεθεί το α ώστε το ζεύγος $(-2, -1)$ να είναι λύση της εξίσωσης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 1

Δεδομένο - Ζητούμενο
Δίνεται σημείο και ζητείται αν ανήκει στις λύσεις της εξίσωσης.
Διαδικασία
• Το ζεύγος που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης αν οι αντικαθιστώντας τα x *και* y με τις δοσμένες τιμές καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει, δηλαδή την επαληθεύουν. Άρα, αντικαθιστούμε τα x, y με τις δοσμένες τιμές, κάνουμε πράξεις και ό,τι βρίσκουμε στο 1ο μέλος πρέπει να βρούμε και στο 2ο. • Για να βρούμε τη μορφή των λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης βάζουμε συνήθως $x = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$ και λύνουμε ως προς y (ή αντίστροφα).

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η γραμμική εξίσωση $2x - 3y = 8$.

α) Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(4,0)$ *και* $(-1,10)$ αποτελούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να βρείτε τη μορφή των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης.

Λύση

α) Για να εξετάσουμε αν το ζεύγος (4,0) είναι λύση της εξίσωσης, αντικαθιστούμε στην εξίσωση όπου $x = 4$ και $y = 0$ και έχουμε :

$2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8 \Leftrightarrow 8 - 0 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ *ισχύει*

Οπότε, το ζεύγος (4,0) **είναι** λύση της.

Όμοια εργαζόμαστε και με το ζεύγος $(-1,10)$.

$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 10 = 8 \Leftrightarrow -2 - 30 = 8 \Leftrightarrow -32 = 8$ *άτοπο*.

Άρα, το σημείο $(-1,10)$ **δεν είναι λύση** της εξίσωσης.

β) Για $x = \kappa$ η εξίσωση γίνεται : $2\kappa - 3y = 8 \Leftrightarrow$ $-3y = -2\kappa + 8 \Leftrightarrow 3y = 2\kappa - 8 \Leftrightarrow y = \frac{2\kappa-8}{3}$.

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι κάθε ζεύγος της μορφής: $\left(\kappa, \frac{2\kappa-8}{3}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 2

Δεδομένο - Ζητούμενο
Δίνεται σημείο που ανήκει στις λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης και ζητείται η τιμή μιας μεταβλητής.
Διαδικασία
Αφού το σημείο που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης, σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν. Αντικαθιστούμε λοιπόν τα x, y με τις δοσμένες τιμές και προκύπτει εξίσωση με άγνωστο τη δοσμένη μεταβλητή και την επιλύουμε.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση $3x - 5y = \alpha$. Να βρεθεί το α ώστε το ζεύγος $(-2, -1)$ να είναι λύση της εξίσωσης.

Λύση

Για $x = -2$ και $y = -1$, η εξίσωση γίνεται: $3(-2) - 5(-1) = \alpha \Leftrightarrow$

$-6 + 5 = \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -1}$.

Στόχος 2 : Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά τις λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης και να βρίσκουν τον συντελεστή διεύθυνσής της.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις των εξισώσεων :

α) $x + 2y = 8$ β) $0x - 3y = 9$ γ) $4x + 0y = 8$

Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης των παραπάνω ευθειών ;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Δίνεται μια γραμμική εξίσωση και ζητείται να παρασταθούν οι λύσεις της σε γραφική παράσταση καθώς και να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών.
Διαδικασία
• Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση ως προς y και φτιάχνουμε πίνακα τιμών. Δύο σημεία αρκούν για τη γραφική παράσταση. Συνήθως βάζουμε για $x = 0$ για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον $\psi'\psi$ και για $\psi = 0$ για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον $\chi'\chi$.

- Θυμίζουμε ότι η ευθεία της μορφής $\psi = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ είναι ευθεία παράλληλη στον $\chi'\chi$ ενώ η $x = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ είναι ευθεία παράλληλη στον $\psi'\psi$.
- Ο άξονας $\chi'\chi$ είναι η ευθεία $\psi = 0$, ενώ ο $\psi'\psi$ είναι η ευθεία $x = 0$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις των εξισώσεων :

α) $x + 2y = 8$ β) $0x - 3y = 9$ γ) $4x + 0y = 8$

Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης των παραπάνω ευθειών ;

Λύση

α) $x + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 8 - x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{8}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 4$

x	0	
y		0

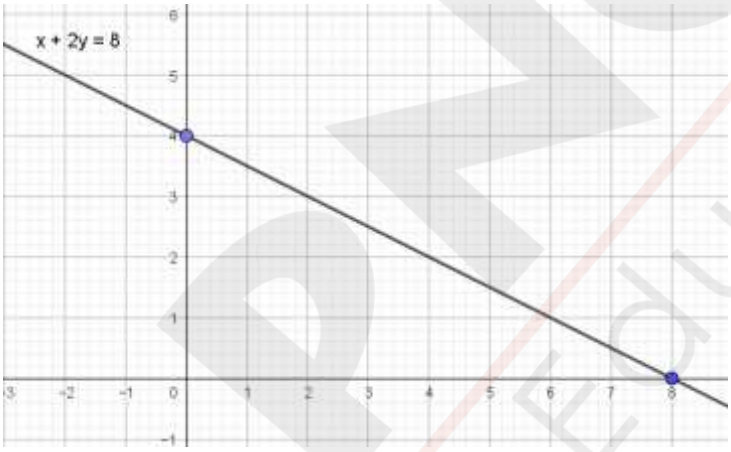
Για $x = 0$ έχουμε : $y = 0 + 4 = 4$.

Για $y = 0$ έχουμε : $0 = -\frac{x}{2} + 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 8$

Οπότε ο πίνακας γίνεται :

x	0	8
y	4	0

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης είναι :



Είναι :

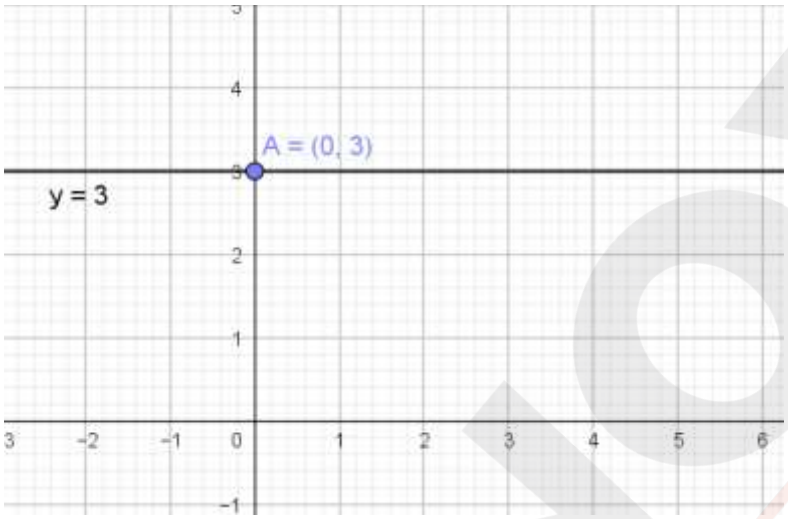
$$x + 2y = 8 \Leftrightarrow 2y = 8 - x \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{8}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 4$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Οπότε, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ο $\lambda = -\frac{1}{2}$.

β) $0x - 3y = 9 \Leftrightarrow -3y = 9 \Leftrightarrow y = -3$

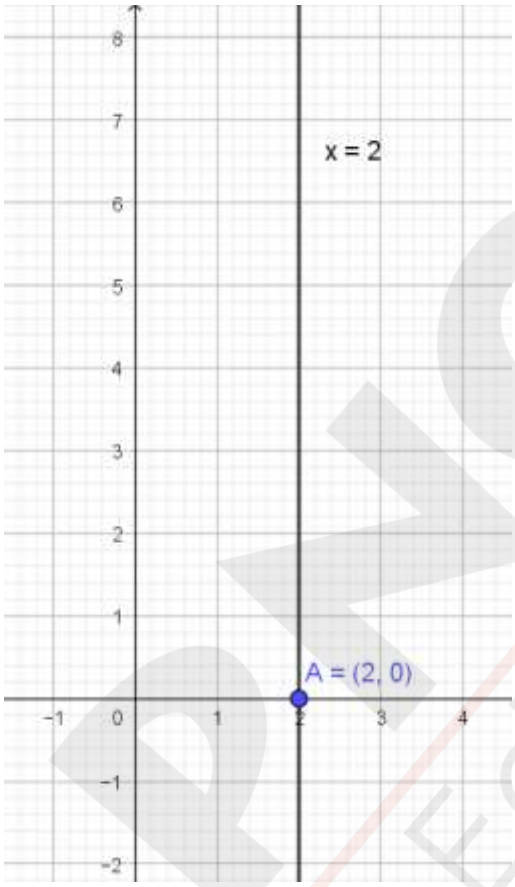
Άρα, πρόκειται για ευθεία παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει τον $\psi'\psi$ στο σημείο (0,-3).



Είναι : $y = -3 \Leftrightarrow y = 0 \cdot x - 3$ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 0.

γ) $4x + 0y = 8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$

Άρα, πρόκειται για ευθεία παράλληλη στον $\psi'\psi$ που τέμνει τον $\chi'\chi$ στο σημείο $(2,0)$.



Συντελεστής διεύθυνσης για τη $x = 2$ δεν ορίζεται.

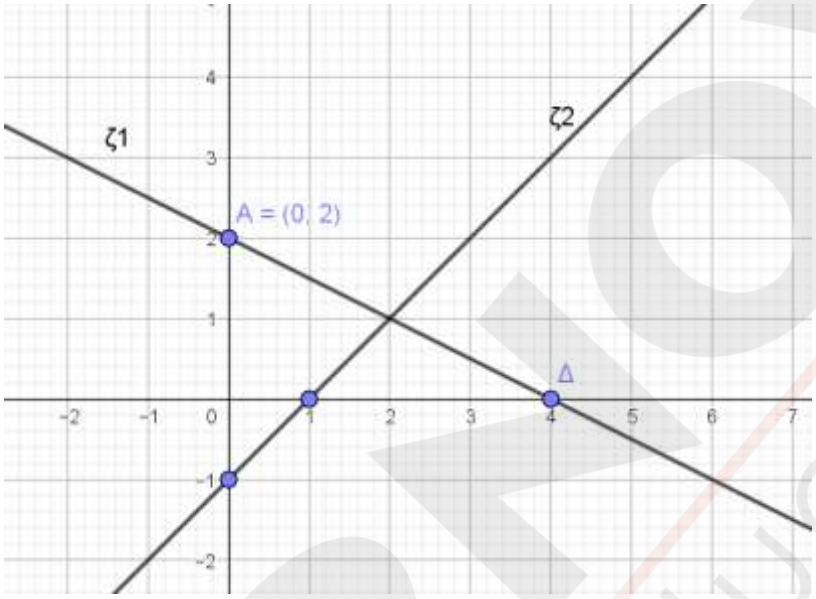
Στόχος 3 : Να επιλύουν γραφικά ένα σύστημα με δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε γραφικά το σύστημα : $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

Άσκηση 2



α) Ποιες είναι οι εξισώσεις των ευθειών που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 του σχήματος ;

β) Ποιο σύστημα ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 του σχήματος και ποια η λύση του;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3ου ΣΤΟΧΟΥ -ΜΟΡΦΗ 1

Δεδομένο - Ζητούμενο
Δίνονται δύο γραμμικές εξισώσεις και ζητείται να βρεθεί **γραφικά το σημείο τομής τους**, δηλαδή η λύση του συστήματος (αν υπάρχει).
Διαδικασία
Σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. • Αν τέμνονται σε ένα κοινό σημείο (x_0, y_0) τότε αυτή θα είναι **η μοναδική λύση** του συστήματος. • Αν είναι **παράλληλες** , τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**. • Αν **ταυτίζονται** , τότε το σύστημα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. • $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$ • $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$ • $\varepsilon_1 // \chi'\chi \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 0$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε γραφικά το σύστημα : $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

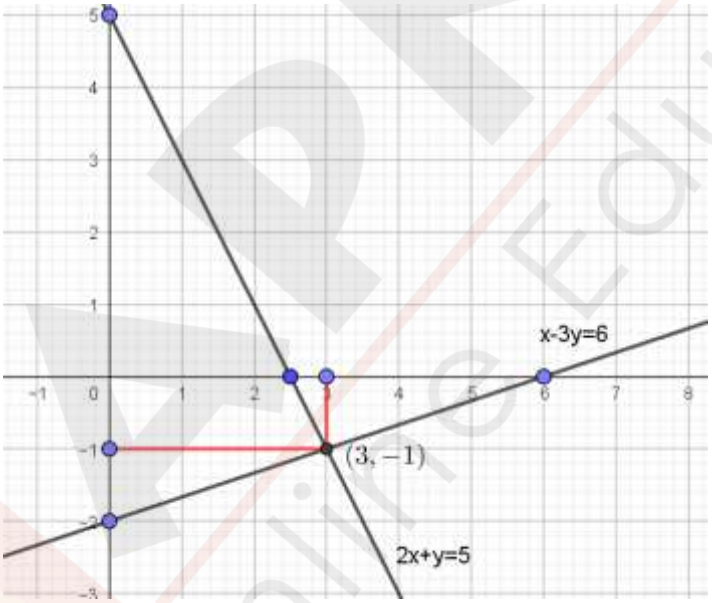
Λύση

- $x - 3y = 6 \iff -3y = -x + 6 \iff y = -\frac{x}{-3} + \frac{6}{-3} \iff y = \frac{1}{3}x - 2$

x	0	6
y	-2	0

- $2x + y = 5 \iff y = -2x + 5$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	5	0



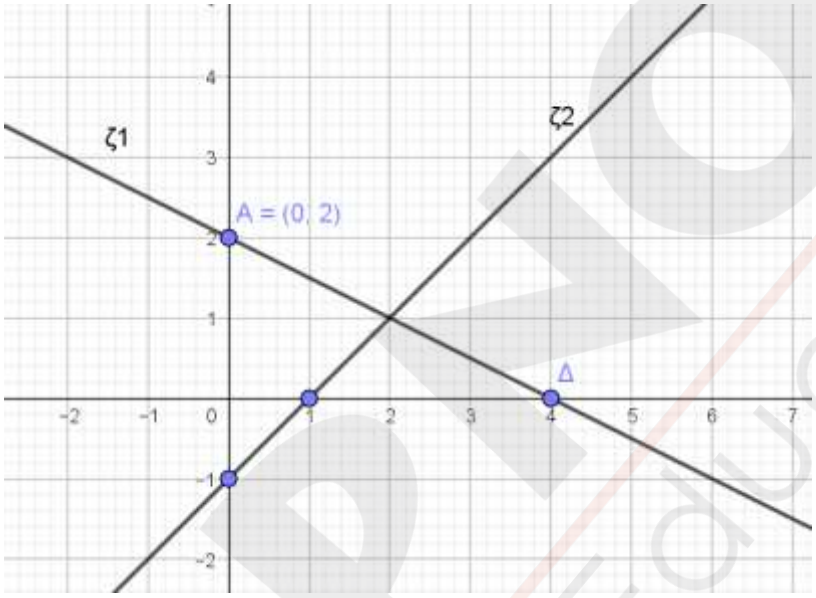
Από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο τομής είναι το $(3, -1)$ οπότε η λύση του συστήματος είναι : $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{3}, -\mathbf{1})$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3ου ΣΤΟΧΟΥ -ΜΟΡΦΗ 2

Δεδομένο - Ζητούμενο
Δίνονται στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις δύο ευθειών και ζητούνται οι εξισώσεις των ευθειών καθώς και το σύστημα που ορίζουν και η λύση του.
Διαδικασία
Η κάθε ευθεία είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$. • Βρίσκουμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η κάθε ευθεία, αντικαθιστούμε τα x, y και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει. Αυτό το κάνουμε και για τις δύο ευθείες. • Τις δύο εξισώσεις που βρήκαμε τις φέρνουμε στη μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο σύστημα. • Αν οι δύο ευθείες τέμνονται, πηγαίνουμε στο σημείο τομής φέρνουμε κάθετες στους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$. Οι αριθμοί που βρήκαμε είναι η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου τομής τους.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1



α) Ποιες είναι οι εξισώσεις των ευθειών που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 του σχήματος ;

β) Ποιο σύστημα ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 του σχήματος και ποια η λύση του;

Λύση

α) ζ_1: $y = \alpha x + \beta$ η οποία διέρχεται από τα σημεία (0,2) και (4,0).

$$2 = \alpha \cdot 0 + \beta \iff \beta = 2 \text{ και } 0 = \alpha \cdot 4 + \beta \iff 4\alpha + \beta = 0 \iff$$

$$4\alpha + 2 = 0 \iff 4\alpha = -2 \iff \alpha = -\frac{2}{4} \iff \boldsymbol{\alpha} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Άρα, η ευθεία (ζ_1) είναι :

$y = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 2y = -x + 4 \Leftrightarrow x + 2y = 4$

ζ_2: $y = \alpha x + \beta$ η οποία διέρχεται από τα σημεία (0,-1) και (1,0).

$-1 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$ και $0 = \alpha \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow$

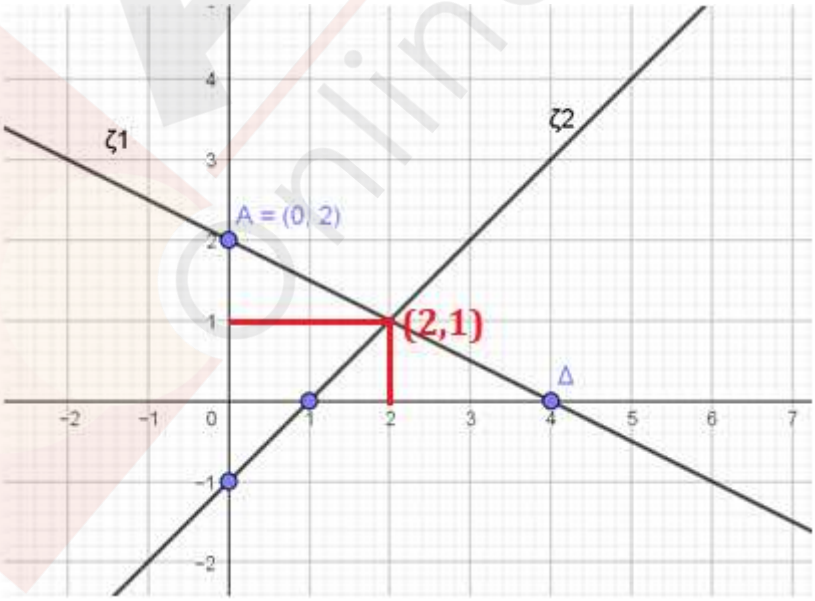
$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

Άρα, η ευθεία (ζ_2) είναι : $y = x - 1 \Leftrightarrow x - y = 1$

β) Το σύστημα που ορίζουν οι δύο ευθείες είναι :

$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ και το σημείο τομής τους είναι : το (2,1) όπως φαίνεται

στο σχήμα :



Στόχος 4 : Να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα με δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους, αλγεβρικά με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

α) $\begin{cases} 7x - y = 19 \\ -2x + 3y = -19 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 7\alpha + 2\beta = 24 \\ 4\alpha + \beta = 15 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο της αντικατάστασης.
Διαδικασία
• Λύνουμε τη μια από τις δύο εξισώσεις (συνήθως την πιο απλή) ως προς τον ένα άγνωστο (προτιμάμε αυτόν που έχει συντελεστή 1). • Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση και έτσι έχουμε έναν άγνωστο, τον οποίο και υπολογίζουμε. • Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε, στην άλλη εξίσωση και έτσι βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $\begin{cases} 7x - y = 19 \\ -2x + 3y = -19 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 7\alpha + 2\beta = 24 \\ 4\alpha + \beta = 15 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 7x - y = 19 \\ -2x + 3y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 19 \\ -2x + 3(7x - 19) = -19 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 7x - 19 \\ -2x + 21x - 57 = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 19 \\ 19x = 57 - 19 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 7x - 19 \\ 19x = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7x - 19 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \cdot 2 - 19 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \boldsymbol{y = -5} \\ \boldsymbol{x = 2} \end{cases}$

β) $\begin{cases} 7\alpha + 2\beta = 24 \\ 4\alpha + \beta = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\alpha + 2(15 - 4\alpha) = 24 \\ \beta = 15 - 4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 7\alpha + 30 - 8\alpha = 24 \\ \beta = 15 - 4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 24 - 30 \\ \beta = 15 - 4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 15 - 4 \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 6} \\ \boldsymbol{\beta = -9} \end{cases}$

Στόχος 5 : Να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα με δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους, αλγεβρικά με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2\chi + 9\psi = 25 \\ 4\chi + 9\psi = 23 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.
Διαδικασία
• Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους (όποιον εμείς θέλουμε). • Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και έτσι έχουμε μια εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και υπολογίζουμε. • Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου, που υπολογίσαμε σε μια από τις δύο αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2\chi + 9\psi = 25 \\ 4\chi + 9\psi = 23 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot(+2) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 5y = 1 \\ 6x + 4y = -10 \ (+) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$0x + 9y = -9$$

$$\begin{cases} 9y = -9 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 3x + 2(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 3x - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ 3x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = -1} \\ \boldsymbol{x = -1} \end{cases}$$

β) $\begin{cases} 2\chi + 9\psi = 25 \\ 4\chi + 9\psi = 23 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot(+1) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\chi - 9y = -25 \\ 4\chi + 9\psi = 23 \ (+) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$2\chi + 0\psi = -2$$

$$\begin{cases} 2\chi = -2 \\ 2\chi + 9\psi = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ 2(-1) + 9\psi = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ -2 + 9\psi = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = -1 \\ 9\psi = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\chi = -1} \\ \boldsymbol{\psi = 3} \end{cases}$$

Στόχος 6: Να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε ένα σύστημα έχει λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε αόριστο, είτε γραφικά είτε με τις δύο παραπάνω αλγεβρικές μεθόδους.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν γραφικά τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

Άσκηση 2

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης :

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

Άσκηση 3

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 1

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί γραφικά σύστημα και να εξεταστεί αν έχει λύση.
Διαδικασία
Κάνουμε τη γραφική παράσταση των ευθειών που αντιστοιχούν στις 2 εξισώσεις και αν : • Είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**. • Αν ταυτίζονται, τότε το σύστημα είναι **αόριστο**.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν γραφικά τα συστήματα :

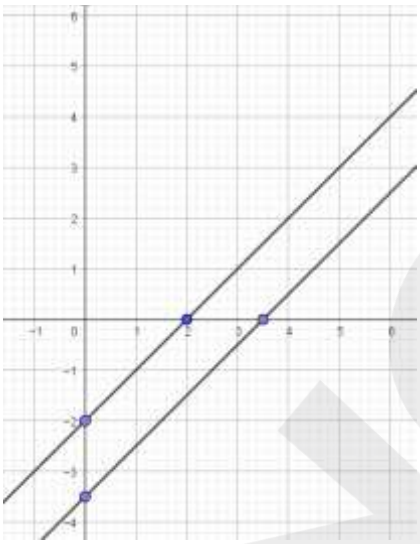
α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

Λύση

α) $x - y = 2$ $-2x + 2y = -7$

x	0	2
y	-2	0

x	0	$\frac{7}{2}$
y	$-\frac{7}{2}$	0

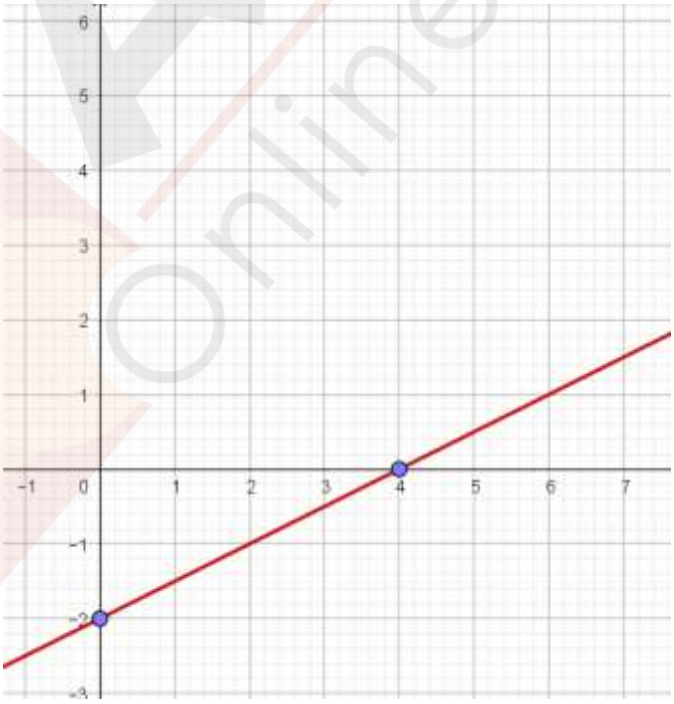


Οι ευθείες είναι παράλληλες οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

β)) $x - 2y = 4$ $\qquad$ $-2x + 4y = -8$

x	0	4
y	-2	0

x	0	4
y	-2	0



Οι δύο ευθείες ταυτίζονται οπότε το σύστημα είναι αόριστο και έχει άπειρες λύσεις :

$y = k \in \mathbb{R}$ και $x = 2k + 4$

Οι άπειρες λύσεις είναι : $(x, y) = (2k + 4, k), k \in \mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 2

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και να εξεταστεί αν έχει λύση.
Διαδικασία
Λύνουμε όπως έχει αναφερθεί παραπάνω το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και αν η μία εξίσωση βγει αδύνατη τότε και το σύστημα είναι **αδύνατο.** Αν η μία εξίσωση βγει αόριστη τότε και το σύστημα είναι **αόριστο** και βρίσκουμε τη μορφή των λύσεων όπως έχουμε αναφέρει στον στόχο1..

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης :

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ -2(y+2) + 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = y + 2 \\ -2y - 4 + 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 0y = -3 \end{cases}$

Η εξίσωση $0y = -3$ είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

β)

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2(2y+4) + 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ -4y - 8 + 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 4 \\ 0y = 0 \end{cases}$

Η εξίσωση $0y = 0$ είναι αόριστη, άρα και το σύστημα είναι αόριστο δηλαδή έχει άπειρες λύσεις οι οποίες είναι :

$y = k \in \mathbb{R}$ και $x = 2k + 4$

Οι **άπειρες λύσεις** είναι : $(x, y) = (2k + 4, k), k \in \mathbb{R}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 3

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών και να εξεταστεί αν έχει λύση.
Διαδικασία
Λύνουμε όπως έχει αναφερθεί παραπάνω το με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών και αν κατά την πρόσθεση των 2 εξισώσεων προκύψει εξίσωση της μορφής $0x + 0y = k \neq 0$ το σύστημα είναι **αδύνατο.** Αν κατά την πρόσθεση των 2 εξισώσεων προκύψει εξίσωση της μορφής $0x + 0y = 0$ το σύστημα είναι **αόριστο** και βρίσκουμε τη μορφή των λύσεων όπως έχουμε αναφέρει στον στόχο1.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθούν τα συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot (+2) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 0x + 0y = -3 \end{cases}$$

Η εξίσωση $0x + 0y = -3$ είναι αδύνατη άρα και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

β) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ είναι αόριστη άρα και το σύστημα είναι αόριστο και οι άπειρες λύσεις είναι :

$y = k \in \mathbb{R}$ και $x = 2k + 4$

Οι άπειρες λύσεις είναι : $(x, y) = (2k + 4, k), k \in \mathbb{R}$

Στόχος 7 : Να είναι σε θέση να επιλύουν συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους σε πιο πολύπλοκη μορφή.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} \frac{x+4}{4} + \frac{y-3}{3} = -1 \\ y - 5x = -3 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 100x + 300y = 400 \\ -2x + 5y = 3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}01y = -0{,}03 \\ 4x + 3y = -5 \end{cases}$

Άσκηση 2

Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -12 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = -5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} |x| + 5|y| = 11 \\ 3|x| - 2|y| = -1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8 \\ -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -7 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x^3 + 5y^3 = -4 \\ 3x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να λυθεί ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους που δεν είναι από την αρχή στη μορφή : $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$.
Διαδικασία
Γενικά για να λύσουμε ένα σύστημα κάνουμε: Αν οι εξισώσεις έχουν παρονομαστές : • Απαλοιφή παρονομαστών • Κάνουμε τις πράξεις και χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. • Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. • Βάζουμε τα x κάτω από τα x και τα y κάτω από τα y. • Εφαρμόζουμε μία από τις μεθόδους επίλυσης που έχουμε αναφέρει.

Αν αντί για x, y έχουμε κάποια **δύναμη, απόλυτο , ρίζα ή κλάσμα** που εμφανίζονται τα ίδια και στις 2 εξισώσεις, τα θέτουμε με κάποια άλλα γράμματα και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει. Στη συνέχεια γυρνάμε εκεί που θέσαμε και βρίσκουμε τους αρχικούς αγνώστους .

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} \frac{x+4}{4}+\frac{y-3}{3}= -1 \\ y-5x=-3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 100x+300y=400 \\ -2x+5y=3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 0{,}02x+0{,}01y=-0{,}03 \\ 4x+3y=-5 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} \frac{x+4}{4}+\frac{y-3}{3}= -1 \\ y-5x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\cdot\frac{x+4}{4}+12\cdot\frac{y-3}{3}= 12\cdot(-1) \\ y-5x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3(x+4)+4(y-3)=-12 \\ y-5x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+12+4y-12=-12 \\ y-5x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x+4y=-12 \\ -5x+y=-3 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-4y=12 \\ -20x+4y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-23x+0y=0\\-5x+y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-23x=0\\-5x+y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x=0}\\\boldsymbol{y=-3}\end{cases}$$

β) $$\begin{cases}100x+300y=400\\-2x+5y=3\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot\frac{1}{100}\\\cdot 1\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=4\\-2x+5y=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=4-3y\\-2(4-3y)+5y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-3y\\-8+6y+5y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-3y\\11y=3+8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-3y\\11y=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-3\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x=1}\\\boldsymbol{y=1}\end{cases}$$

γ) $$\begin{cases}0{,}02x+0{,}01y=-0{,}03\\4x+3y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 100\\\cdot 1\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=-3\\4x+3y=-5\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot(-2)\\\cdot 1\end{matrix}\right.\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-4x-2y=6\\4x+3y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+y=1\\2x+y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\2x+1=-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=1\\2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{y=1}\\\boldsymbol{x=-2}\end{cases}$$

Άσκηση 2

Να λύσετε τα συστήματα :

α) $$\begin{cases}3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=-12\\2\sqrt{x}-\sqrt{y}=-5\end{cases}$$

β) $$\begin{cases}|x|+5|y|=11\\3|x|-2|y|=-1\end{cases}$$

γ) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8 \\ -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -7 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x^3 + 5y^3 = -4 \\ 3x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -12 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = -5 \end{cases}$

Πρέπει : $x \geq 0, y \geq 0$.

Θέτω $\kappa = \sqrt{x}$ και $\lambda = \sqrt{y}$. Οπότε, το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 3\kappa - 2\lambda = -12 \\ 2\kappa - \lambda = -5 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot(+2) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa + 2\lambda = 12 \\ 4\kappa - 2\lambda = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 0\lambda = 2 \\ 2\kappa - \lambda = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa = 2 \\ 2 \cdot 2 - \lambda = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\kappa = 2} \\ \boldsymbol{\lambda = 9} \end{cases}$$

Άρα : $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 4}$ *και* $\sqrt{y} = 9 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 81}$

β) $\begin{cases} |x| + 5|y| = 11 \\ 3|x| - 2|y| = -1 \end{cases}$

Θέτω $\kappa = |x|$, $\lambda = |y|$. Το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} \kappa + 5\lambda = 11 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa - 15\lambda = -33 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0\kappa - 17\lambda = -34 \\ \kappa + 5\lambda = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \kappa + 5 \cdot 2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

$|x| = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \pm 1}$, $|y| = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \pm 2}$

γ) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 8 \\ -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = -7 \end{cases}$

Πρέπει $x \neq 0, y \neq 0$.

Θέτουμε $\alpha = \frac{1}{x}$ $\kappa\alpha\iota\ \beta = \frac{1}{y}$. Το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 8 \\ -\alpha + 2\beta = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 8 \\ -2\alpha + 4\beta = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\alpha + 3\beta = -6 \\ 2\alpha - \beta = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -2 \\ 2\alpha - (-2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ 2\alpha = 8 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ 2\alpha = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta = -2} \\ \boldsymbol{\alpha = 3} \end{cases}$$

Οπότε : $\frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ $\kappa\alpha\iota \frac{1}{y} = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}}$

δ) $\begin{cases} x^3 + 5y^3 = -4 \\ 3x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Θέτουμε : $\lambda = x^3$, $\lambda = y^3$. Το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} \kappa + 5\lambda = -4 \\ 3\kappa + \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4 - 5\lambda \\ 3(-4 - 5\lambda) + \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4 - 5\lambda \\ -12 - 15\lambda + \lambda = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa = -4 - 5\lambda \\ -14\lambda = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4 - 5(-1) \\ \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Οπότε :

$x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$

$y^3 = -1 \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{|-1|} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -1}$

Στόχος 8 : Να είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ένα οικοτροφείο έχει συνολικά 26 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια στα οποία υπάρχουν 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια ;

Άσκηση 2

Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μια πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά 65 cm^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Επίλυση προβλήματος με τη βοήθεια συστήματος.
Διαδικασία
Για να επιλύσουμε ένα **πρόβλημα** με τη βοήθεια ενός συστήματος, εργαζόμαστε ως εξής : Συμβολίζουμε τα ζητούμενα με μεταβλητές x, y $κλπ$. • Βάζουμε περιορισμούς για τους αγνώστους. • Μετατρέπουμε τα δεδομένα σε εξισώσεις. • Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει. • Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ένα οικοτροφείο έχει συνολικά 26 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια στα οποία υπάρχουν 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια ;

Λύση

Έστω ότι έχει x δίκλινα και y τρίκλινα.

Το οικοτροφείο έχει συνολικά 26 δωμάτια, οπότε : $x + y = 26 \quad (\mathbf{1})$

Το 1 δίκλινο έχει 2 δωμάτια άρα τα x έχουν $2x$ κρεβάτια . Το 1 τρίκλινο έχει 3 κρεβάτια, τα y τρίκλινα έχουν $3y$ κρεβάτια. Συνολικά έχει:

$2x + 3y = 68 \qquad (\mathbf{2})$

Οπότε λύνουμε το σύστημα :

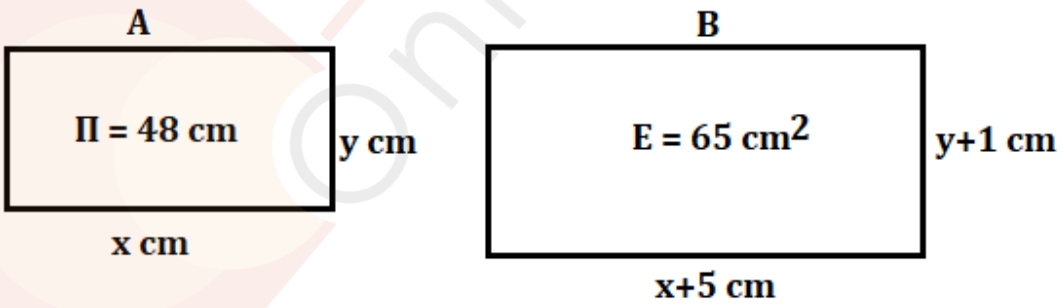
$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} \cdot(-2) \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -52 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + y = 16 \\ x + y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 16 \\ x + 16 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16 \\ x = 26 - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 16} \\ \boldsymbol{x = 10} \end{cases}$$

Άσκηση 2

Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μια πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά 65 cm^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ;

Λύση



Έστω x cm το μήκος και y cm το πλάτος . Αφού η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου είναι 48 cm, προκύπτει ότι : $2x + 2y = 48 \Leftrightarrow$

$x + y = 24 \qquad (\mathbf{1})$

Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου είναι xy. Το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι : $(x+5)(y+1)$. Το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου αυξάνει κατά 65 cm^2 , οπότε :

$(x+5)(y+1) = xy + 65 \Leftrightarrow xy + x + 5y + 5 = xy + 65 \Leftrightarrow$

$xy + x + 5y + 5 - xy - 65 = 0 \Leftrightarrow x + 5y - 60 = 0 \Leftrightarrow$

$x + 5y = 60 \qquad \mathbf{(2)}$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 5y = 60 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ 1\cdot \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -24 \\ x + 5y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 4y = 36 \\ x + y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 9 \\ x + 9 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 9\ cm} \\ \boldsymbol{x = 15\ cm} \end{cases}$$

Στόχος 9 : Να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα με δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους, αλγεβρικά με τη μέθοδο των οριζουσών.

Άσκηση 1

Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 4x - y = -13 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 6x - 4y = -3 \\ -9x + 6y = 2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Επίλυση συστήματος με τη μέθοδο των οριζουσών.
Διαδικασία
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο οριζουσών για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, ακολουθώντας τα εξής βήματα : Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y. Στη συνέχεια : • Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$ • Αν $D = D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. • Αν $D = 0$ *και* $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο. • Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \alpha' x + \beta' y = 0 \end{cases}$ που έχει σταθερούς όρους ίσους με0, λέγεται **ομογενές**. Ένα ομογενές σύστημα έχει :$D_x = D_y = 0$ και δεν είναι **ποτέ** αδύνατο. Ή θα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (0,0)$ είτε θα έχει άπειρες λύσεις, στις οποίες θα περιλαμβάνεται και το $(0,0)$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε με τη μέθοδο των οριζουσών τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 4x - y = -13 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 6x - 4y = -3 \\ -9x + 6y = 2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} 4x - y = -13 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 12 + 2 = 14 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -13 & -1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -13 \cdot 3 - (-1) \cdot 11 = -39 + 11 = -28$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - (-13) \cdot 2 = 44 + 26 = 70$$

Αφού $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση :

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{28}{14} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{70}{14} = 5$$

Άρα, η μοναδική λύση του είναι $(x, y) = (-2,5)$.

β) $\begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - (-7) \cdot (-2) = 15 - 14 = 1 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - (-7) \cdot 0 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 = 0$$

Ισχύει, $D \neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{1} = 0$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{1} = 0$$

Δηλαδή τη λύση : $(x, y) = (0,0)$.

Στόχος 10 : Να μπορούν να επιλύουν ένα παραμετρικό σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου (ή των παραμέτρων).

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του λ το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda(x-4) = -4(2y+1) \\ (\lambda-1)x + (\lambda+2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Επίλυση παραμετρικού συστήματος.
Διαδικασία
Ένα σύστημα στο οποίο οι συντελεστές ή οι σταθεροί όροι εξαρτώνται από μια παράμετρο, ονομάζεται **παραμετρικό**. Για να λύσουμε ένα γραμμικό παραμετρικό σύστημα, εργαζόμαστε ως εξής : • Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και (αν είναι δυνατόν) τις παραγοντοποιούμε. • Βρίσκουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου ισχύει $D = 0$. • Για τις τιμές της παραμέτρου που ισχύει $\boldsymbol{D \neq 0}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$. • Για τις τιμές της παραμέτρου που ισχύει $\boldsymbol{D = 0}$, το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις. Έτσι, πρέπει να αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στο αρχικό σύστημα και να ελέγξουμε αν είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του λ το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda(x-4) = -4(2y+1) \\ (\lambda-1)x + (\lambda+2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} \lambda(x-4) = -4(2y+1) \\ (\lambda-1)x + (\lambda+2)y = 3\lambda - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x - 4\lambda = -8y - 4 \\ \lambda x - x + \lambda y + 2y = 3\lambda - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda x + 8y = 4\lambda - 4 \\ (\lambda-1)x + (\lambda+2)y = 3\lambda - 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 8 \\ \lambda-1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2) - 8(\lambda-1) = \lambda^2 + 2\lambda - 8\lambda + 8 =$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$ αφού:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{+6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$\lambda = \frac{6-2}{2} = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{6+2}{2} = 4$$

Οπότε : $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$

Άρα, $\boldsymbol{D = (\lambda - 2)(\lambda - 4)}$.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda-4 & 8 \\ 3\lambda-4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (4\lambda-4)(\lambda+2) - 8(3\lambda-4) =$$

$$4\lambda^2 + 8\lambda - 4\lambda - 8 - 24\lambda + 32 = 4\lambda^2 - 20\lambda + 24 =$$

$$4(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 4(\lambda-2)(\lambda-3) \Leftrightarrow \boldsymbol{D_x = 4(\lambda-2)(\lambda-3)}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4\lambda-4 \\ \lambda-1 & 3\lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(3\lambda-4) - (4\lambda-4)(\lambda-1) =$$

$$3\lambda^2 - 4\lambda - 4\lambda^2 + 4\lambda + 4\lambda - 4 = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

Άρα: $\boldsymbol{D_y = -(\lambda-2)^2}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η) $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ *και* $\lambda \neq 4$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4(\lambda-2)(\lambda-3)}{(\lambda-2)(\lambda-4)} = \frac{4(\lambda-3)}{\lambda-4}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(\lambda-2)^2}{(\lambda-2)(\lambda-4)} = -\frac{\lambda-2}{\lambda-4}$$

2η) $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = 4$

Για λ =2 το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 2x+8y=4 \\ x+4y=2 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-8y=-4 \\ 2x+8y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0y=0 \\ x+4y=2 \end{cases}$$

Το σύστημα είναι αόριστο δηλαδή έχει άπειρες λύσεις οι οποίες είναι :

Έστω $y = k \in \mathbb{R}$. Τότε : $x = 2-4y \Leftrightarrow x = 2-4k, k \in \mathbb{R}$.

Άρα, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{2-4k}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ οι άπειρες λύσεις.

Για λ = 4 , το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 4x+8y=12 \\ 3x+6y=8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x-24y=-36 \\ 12x+24y=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0y=-4 \\ 3x+6y=8 \end{cases}$$

Η **1η** εξίσωση είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Στόχος 11 : Να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους (3x3).

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με αντικατάσταση :

$$\begin{cases} 2x + y + \omega = 7 \\ 3x + 5y - \omega = 10 \\ x - y + 2\omega = 5 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με αντίθετους συντελεστές:

$$\begin{cases} 5x + 6y + 2\omega = 6 \\ 3x + 2y + 5\omega = 22 \\ 2x - 3y + 6\omega = 34 \end{cases}$$

Άσκηση 3

Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x - 2y + \omega = 3 \\ 2x - 3y - \omega = 2 \\ -4x + 3y + 11\omega = -2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - y - \omega = 1 \\ 2x + y - 5\omega = -4 \\ x - 4y + 2\omega = 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = -2 \\ y + \omega = 3 \\ \omega + x = 11 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Επίλυση συστήματος 3 x 3.
Διαδικασία
Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3, χρησιμοποιούμε : • Τη μέθοδο της αντικατάστασης ή • Τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών **Μέθοδος Αντικατάστασης** • Παίρνουμε μια από τις εξισώσεις και τη λύνουμε ως προς κάποιον άγνωστο. • Αντικαθιστούμε τον άγνωστο στις άλλες δύο εξισώσεις. Έτσι, έχουμε καταφέρει να φτιάξουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2. • Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα 2x2. • Αφού υπολογίσουμε τους 2 αγνώστους, υπολογίζουμε τον τρίτο άγνωστο από την αρχική εξίσωση με απλή αντικατάσταση. **Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών** • Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός

αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι.

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που επεξεργαστήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με δύο αγνώστους.
- Επαναλαμβάνουμε τα δύο παραπάνω βήματα με μια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την τρίτη εξίσωση που δεν χρησιμοποιήσαμε, απαλείφοντας τον ίδιο άγνωστο, οπότε προκύπτει ένα 2x2 γραμμικό σύστημα.
- Λύνουμε το 2x2 γραμμικό σύστημα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα του 2x2 γραμμικού συστήματος, το 3x3 αρχικό σύστημα είτε θα έχει μοναδική λύση είτε θα είναι αδύνατο είτε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με αντικατάσταση :

$$\begin{cases} 2x + y + \omega = 7 \\ 3x + 5y - \omega = 10 \\ x - y + 2\omega = 5 \end{cases}$$

Λύση

$x - y + 2\omega = 5 \Leftrightarrow x = 5 + y - 2\omega$

$$\begin{cases} 2(5 + y - 2\omega) + y + \omega = 7 \\ 3(5 + y - 2\omega) + 5y - \omega = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + 2y - 4\omega + y + \omega = 7 \\ 15 + 3y - 6\omega + 5y - \omega = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3y-3\omega=7 \\ 8y-7\omega=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7+3\omega}{3} \\ 8\cdot\frac{7+3\omega}{3}-7\omega=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{7+3\omega}{3} \\ 8(7+3\omega)-21\omega=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7+3\omega}{3} \\ 56+24\omega-21\omega=-15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{7+3\omega}{3} \\ 3\omega=-71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7+3\omega}{3} \\ \omega=-\dfrac{71}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7+3\left(-\frac{71}{3}\right)}{3} \\ \omega=-\dfrac{71}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{7-71}{3}=-\dfrac{64}{3} \\ \omega=-\dfrac{71}{3} \end{cases}$$

Οπότε : $x=5+y-2\omega=5+\left(-\frac{64}{3}\right)-2\left(-\frac{71}{3}\right)=2-\frac{64}{3}+\frac{142}{3} \Leftrightarrow$

$$x=\frac{6}{3}-\frac{64}{3}+\frac{142}{3} \Leftrightarrow x=\frac{84}{3}$$

Οπότε, η λύση του συστήματος είναι :

$$(x,y,\omega)=\left(\frac{84}{3},-\frac{64}{3},-\frac{71}{3}\right)$$

Άσκηση 2

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με αντίθετους συντελεστές:

$$\begin{cases} 5x+6y+2\omega=6 \\ 3x+2y+5\omega=22 \\ 2x-3y+6\omega=34 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 5x+6y+2\omega=6 \\ 3x+2y+5\omega=22 \\ 2x-3y+6\omega=34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+6y+2\omega=6 \\ 3x+2y+5\omega=22 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x-18y-6\omega=-18 \\ 15x+10y+25\omega=110 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις : $-8y+19\omega=92$ **(1)**

$$\begin{cases} 5x+6y+2\omega=6 \\ 2x-3y+6\omega=34 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x-12y-4\omega=-12 \\ 10x-15y+30\omega=170 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις : $-27y+26\omega=158$ **(2)**

Προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{cases} -8y+19\omega=92 \\ -27y+26\omega=158 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-27) \\ \cdot 8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 216y-513\omega=-2.484 \\ -216y+208\omega=1.264 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -305\omega=-1.220 \\ -8y+19\omega=92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=4 \\ -8y+76=92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=4 \\ -8y=92-76 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega=4 \\ -8y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=4 \\ y=-2 \end{cases}$$

Άσκηση 3

Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x-2y+\omega=3 \\ 2x-3y-\omega=2 \\ -4x+3y+11\omega=-2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-y-\omega=1 \\ 2x+y-5\omega=-4 \\ x-4y+2\omega=7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+y=-2 \\ y+\omega=3 \\ \omega+x=11 \end{cases}$

Λύση

α) $\begin{cases} x-2y+\omega=3 \\ 2x-3y-\omega=2 \\ -4x+3y+11\omega=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y+\omega=3 \\ 2x-3y-\omega=2 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y-2\omega=-6 \\ 2x-3y-\omega=2 \end{cases}$

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε : $y-3\omega=-4$. **(1)**

$\begin{cases} x-2y+\omega=3 \\ -4x+3y+11\omega=-2 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8y+4\omega=12 \\ -4x+3y+11\omega=-2 \end{cases}$

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε : $-5y+15\omega=10$. **(2)**

Έτσι, λύνουμε το σύστημα : $\begin{cases} y-3\omega=-4 \\ -5y+15\omega=10 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 5 \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5y-15\omega=-20 \\ -5y+15\omega=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0\omega=-10 \\ y-3\omega=-4 \end{cases}$

Οπότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.

β) $\begin{cases} x-y-\omega=1 \\ 2x+y-5\omega=-4 \\ x-4y+2\omega=7 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y-\omega=1 \\ 2x+y-5\omega=-4 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+2\omega=-2 \\ 2x+y-5\omega=-4 \end{cases}$

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε : $3y-3\omega=-6 \Leftrightarrow$

$y - \omega = -2 \quad \mathbf{(1)}$

$$\begin{cases} x - y - \omega = 1 \\ x - 4y + 2\omega = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + \omega = -1 \\ x - 4y + 2\omega = 7 \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε : $-3y + 3\omega = 6 \Leftrightarrow$

$-y + \omega = 2 \quad \mathbf{(2)}$

$$\begin{cases} y - \omega = -2 \\ -y + \omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y + 0\omega = 0 \\ y - \omega = -2 \end{cases}$$

Καταλαβαίνουμε ότι το σύστημα είναι αόριστο και πάμε να βρούμε τις άπειρες λύσεις :

Είναι : $y - \omega = -2 \Leftrightarrow y = \omega - 2$.

Άρα, για $\omega = \kappa$, είναι $y = \kappa - 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

$x - y - \omega = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y + \omega \Leftrightarrow x = 1 + \kappa - 2 + k \Leftrightarrow$

$x = -1 + 2k$

Άρα, οι **άπειρες λύσεις** είναι :$(x, y, \omega) = (-1 + 2k, k - 2, k), k \in \mathbb{R}$.

γ) $\begin{cases} x + y = -2 & \mathbf{(1)} \\ y + \omega = 3 & \mathbf{(2)} \\ \omega + x = 11 & \mathbf{(3)} \end{cases}$

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2x + 2y + 2\omega = 12 \Leftrightarrow x + y + \omega = 6 \qquad \mathbf{(4)}$

Από $(4), (1) \Rightarrow -2 + \omega = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{8}$.

Από $(4), (2) \Rightarrow x + 3 = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{3}$.

Από $(4),(3) \Longrightarrow y+11=6 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=-5}$.

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})=(\mathbf{3},\mathbf{-5},\mathbf{8})$.