1.1 Γραμμικά συστήματα

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$

Λύση

Είναι ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις δύο ευθείες. Αν οι ευθείες τέμνονται, οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι και η λύση του συστήματος.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών για την $x - y = -1$. Συνήθως βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για $x = 0$: $0 - y = -1 \iff y = 1$

Για $y = 0$: $x - 0 = -1 \iff x = -1$

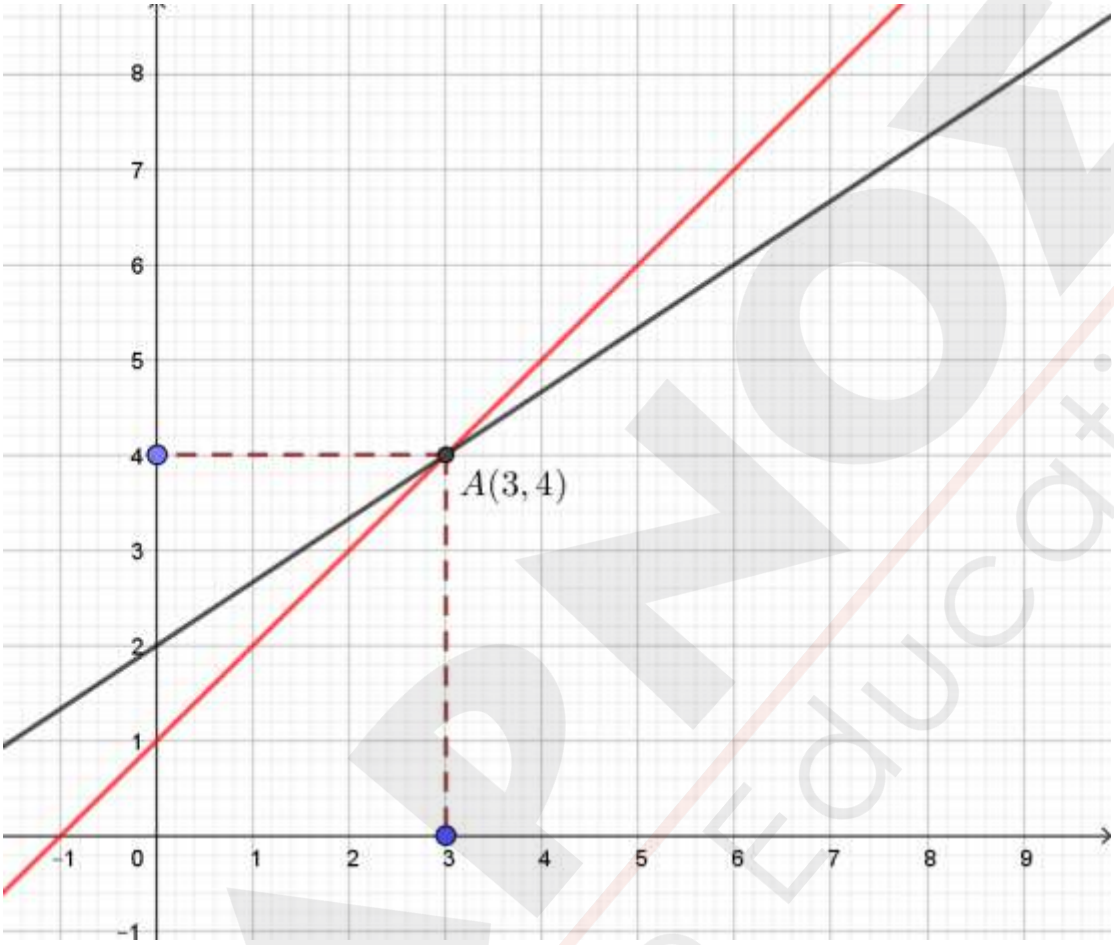
x	0	$\mathbf{-1}$
y	$\mathbf{1}$	0

Φτιάχνουμε τώρα έναν πίνακα τιμών για την $2x - 3y = -6$.

Για $x = 0$: $0 - 3y = -6 \iff y = 2$

Για $y = 0$: $2x - 0 = -6 \iff x = -3$

x	0	$\mathbf{-3}$
y	$\mathbf{2}$	0



Επομένως, η λύση του συστήματος είναι: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{3}, \mathbf{4})$.

Άσκηση 2

Να λυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$

Λύση

Είναι ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις δύο ευθείες.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών για την $x - y = -1$. Συνήθως βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για $x = 0$: $0 - y = -1 \iff y = 1$

Για $y = 0$: $x - 0 = -1 \iff x = -1$

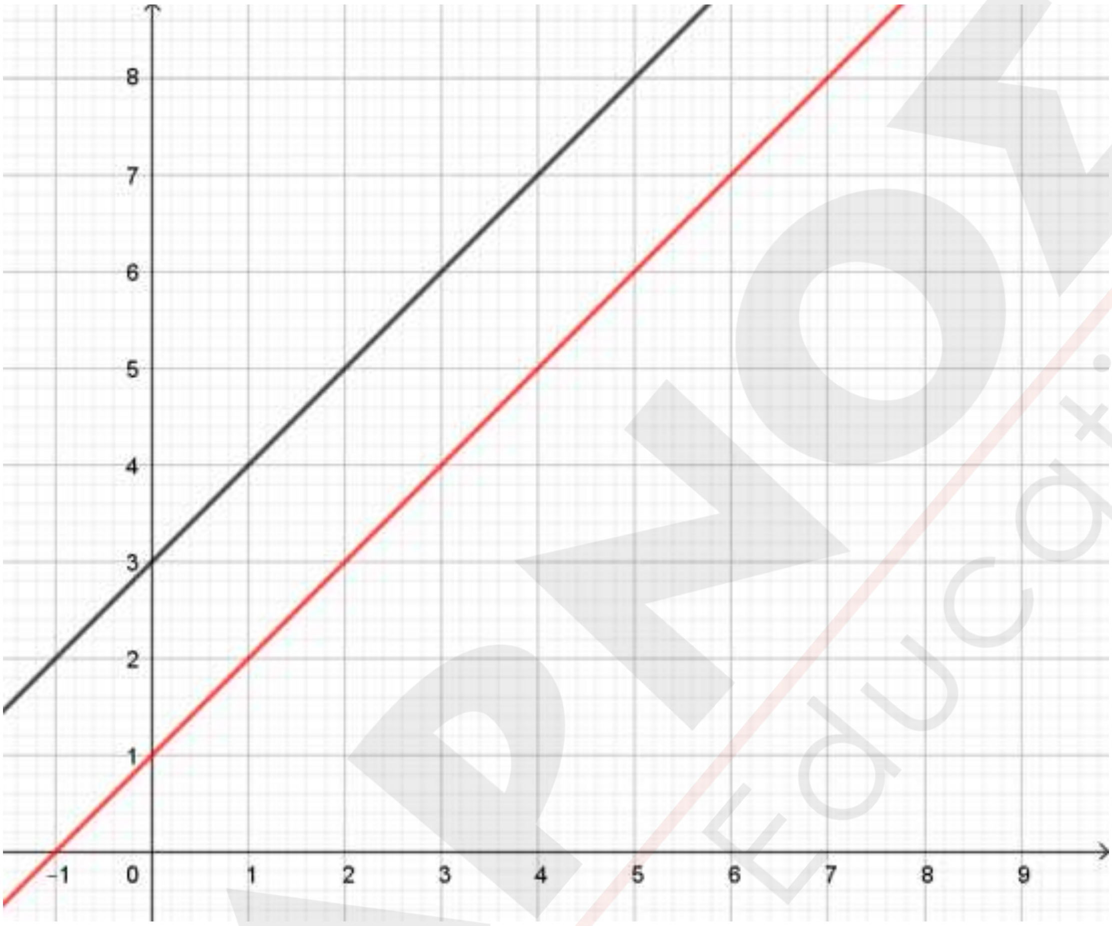
x	0	$\mathbf{-1}$
y	$\mathbf{1}$	0

Φτιάχνουμε τώρα έναν πίνακα τιμών για την $2x - 2y = -6$.

Για $x = 0$: $0 - 2y = -6 \iff y = 3$

Για $y = 0$: $2x - 0 = -6 \iff x = -3$

x	0	$\mathbf{-3}$
y	$\mathbf{3}$	0



Οι ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν τέμνονται, άρα δεν έχουν σημείο τομής. Επομένως, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Άσκηση 3

Να λυθεί γραφικά το σύστημα: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$

Λύση

Είναι ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Κάθε εξίσωση παριστάνει μία ευθεία. Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις δύο ευθείες.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα τιμών για την $x - y = -1$. Συνήθως βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για $x = 0$: $0 - y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$

Για $y = 0$: $x - 0 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

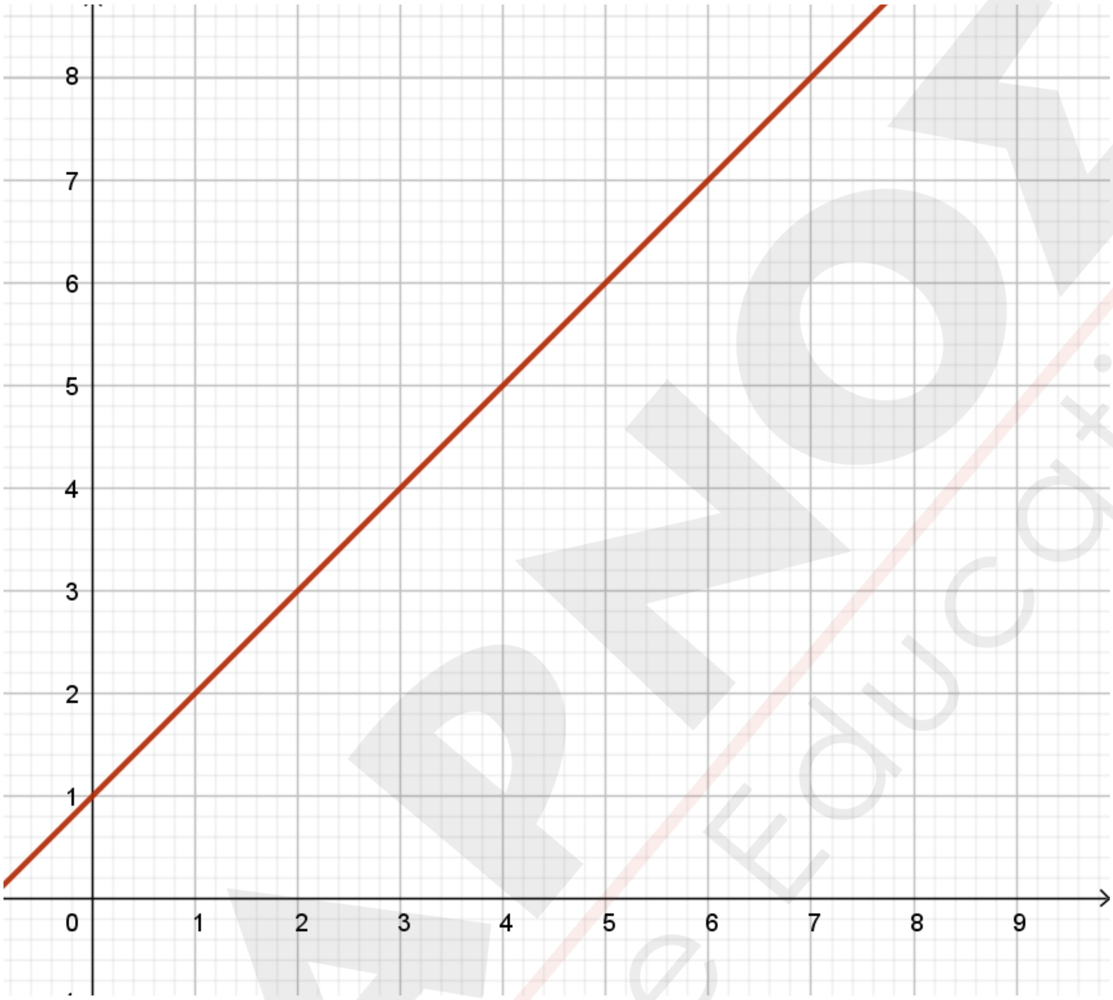
x	0	$\mathbf{-1}$
y	$\mathbf{1}$	0

Φτιάχνουμε τώρα έναν πίνακα τιμών για την $2x - 2y = -2$.

Για $x = 0$: $0 - 2y = -2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$

Για $y = 0$: $2x - 0 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

x	0	$\mathbf{-1}$
y	$\mathbf{1}$	0



Οι δύο ευθείες ταυτίζονται άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή είναι **αόριστο**.

Άσκηση 4

Να λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης το σύστημα: $\begin{cases} x+3y=8 \\ 5x+y=5 \end{cases}$.

Λύση

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς x και αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση.

Έτσι το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+3y=8 \\ 5x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3y \\ 5(8-3y)+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=8-3y \\ 40-15y+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3y \\ -14y=5-40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=8-3y \\ -14y=\ -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3y \\ y=\frac{-35}{-14} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=8-3y \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-3\cdot\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=8-\frac{15}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι η: $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Άσκηση 5

Να λυθεί με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$

Λύση

Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε σε έναν άγνωστο αντίθετους συντελεστές ώστε αν προσθέσουμε τις δύο εξισώσεις να φύγει ο ένας άγνωστος.

Αποφασίζουμε π.χ. να διώξουμε το x. Το $ΕΚΠ(3,4) = 12$. Άρα πολλαπλασιάζουμε την $1^η$ γραμμή με -4 και τη $2^η$ γραμμή με 3. Έχουμε:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases} \left| \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -40 \\ \;\;12x + 9y = 36 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$ προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή. Στην πρώτη γραμμή βάζουμε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και στη δεύτερη παίρνουμε μία από τις προηγούμενες εξισώσεις και αντικαθιστούμε το $y = -4$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} y = -4 \\ 3x + 2(-4) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 3x - 8 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -4 \\ 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 6 \end{cases}$$

Επομένως, η λύση που βρήκαμε είναι: $\boldsymbol{(x, y) = (6, -4)}$.

Άσκηση 6

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x - y(2x-1) \end{cases}$

Λύση

Αρχικά πρέπει κάνοντας αντίστοιχες πράξεις να το φέρουμε στη μορφή: $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$.

Η πρώτη είναι κλασματική οπότε ακολουθούμε τα βήματα επίλυσης κλασματικής εξίσωσης. Δηλαδή:

Β1) Απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών που εδώ είναι $ΕΚΠ(2,4) = 4$.

Β2) Απαλοιφή παρενθέσεων.

Β3) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Β4) Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Στην δεύτερη εξίσωση ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα, εκτός από το Β1.

Έτσι το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x - y(2x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{x-2y}{2} - 4 \cdot \frac{3y-1}{4} = -4x + 4 \cdot 5 \\ 1 - 2xy + 2x = 3x - 2xy + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x-2y) - 1(3y-1) = -4x + 20 \\ -2xy + 2x - 3x + 2xy - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 4y - 3y + 1 = -4x + 20 \\ 2x - 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 4x - 4y - 3y = 20 - 1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ -x - y = -1 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 6 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ -6x - 6y = -6 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -13y = 13 \\ -x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -x - (-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Δηλαδή, η λύση του συστήματος είναι: $\boldsymbol{(x, y) = (2, -1)}$.

Άσκηση 7

Να λυθεί με τη μέθοδο των οριζουσών το σύστημα : $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$.

Λύση

Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)-(-3)\cdot 3 = -4+9 = 5 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 6\cdot(-2)-(-3)\cdot 8 = -12 + 24 = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 6\cdot 3 = 16-18 = -2$$

Αφού $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{D_y}{y} = -\frac{2}{2} = -1$$

Δηλαδή, η λύση είναι $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}, -\mathbf{1}\right)$.

Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$:

- Αν $D \neq 0$ έχει μοναδική λύση τη: $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$.
- Αν $D=0$ το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

Άσκηση 8

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του λ το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda + 2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$

Λύση

Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y ως συνάρτηση των λ.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda + 2) - 2 \cdot 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 =$$

$$= (\lambda + 4)(\lambda - 2)$$

Αφού:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-2+6}{2} = 2 \ , \quad \lambda_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \lambda - 2 \cdot (\lambda + 2) = 4\lambda - 2\lambda - 4 =$$

$$= 2\lambda - 4 = 2(\lambda - 2)$$

Επειδή δεν ξέρουμε ποιο είναι το λ, δεν ξέρουμε αν το D είναι ίσο ή διάφορο με το 0. Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $D \neq 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \iff \lambda \neq \pm 2$

Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\lambda+4)(\lambda-2)}{(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{\lambda+4}{\lambda+2} \quad ,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda-2)}{(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{2}{\lambda+2}$$

2η περίπτωση:

$\boldsymbol{D=0} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$ ή $\lambda = 2$

Για $\boldsymbol{\lambda = -2}$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

Εργαζόμαστε με αντίθετους συντελεστές, προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $0x + 0y = 4$ η οποία είναι αδύνατη άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $\boldsymbol{\lambda = 2}$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ -2x - 2y = -4 \end{cases}$$

Εργαζόμαστε με αντίθετους συντελεστές, προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $0x + 0y = 0$ η οποία είναι αόριστη (άπειρες λύσεις) άρα και το σύστημα είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

Οι άπειρες λύσεις γράφονται ως εξής:

$$2x + 2y = 4 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x \overset{x=k\ \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} y = 2 - k$$

και είναι οι εξής: $(x, y) = (k, 2-k), \quad k \in \mathbb{R}$.

Β’ τρόπος:

Στην περίπτωση που είναι $\boldsymbol{D=0}$ μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Για $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{-2}$ το D γίνεται: $D=0$,

ενώ το $D_x=(-2+4)(-2-2)=2\cdot(-4)=-8\neq 0$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{2}$ το D γίνεται: $D=0$,

το $D_x=(2+4)(2-2)=6\cdot 0=0$ και το

$D_y=2(2-2)=0$ οπότε το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Οι άπειρες λύσεις γράφονται ως εξής:

$$2x+2y=4 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x \overset{x=k\ \in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} y=2-k$$

και είναι οι εξής: $(x,y)=(k,2-k),\quad k\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} x+2y=\lambda \\ 3x+6y=2 \end{cases}$:

i. Να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ii. Να μην έχει καμία λύση.

Λύση

i. Συνήθως όταν έχουμε τέτοιου είδους ασκήσεων, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των οριζουσών.

Για να έχει άπειρο πλήθος λύσεων πρέπει να είναι $D=0$ αλλά και $D_x=D_y=0$.

Είναι:

$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=6-6=0$

$D_x=\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=6\lambda-4$

Πρέπει $D_x=0 \iff 6\lambda-4=0 \iff \lambda=\frac{4}{6} \iff \lambda=\frac{2}{3}$

Επίσης: $D_y=\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-3\lambda.$

Για $\lambda=\frac{2}{3}$, $D_y=2-3\cdot\frac{2}{3}=2-2=0$.

ii. Αφού διαπιστώσαμε ότι $D=0$ αρκεί να είναι

$$D_x\neq 0 \iff \lambda\neq\frac{2}{3}$$

Άσκηση 10

Να λυθεί το σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y για τις οποίες ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$$

Λύση

Βασιζόμενοι στην ισοδυναμία: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \iff \alpha = 0 \ \kappa\alpha\iota\ \beta = 0$, προσπαθούμε να φέρουμε τη δοσμένη σχέση στη μορφή $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Χρησιμοποιούμε λοιπόν, τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, προσθαφαιρώντας κατάλληλους όρους.

Είναι:

$D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0 \iff$

$D_x^2 - 12D_x + D_y^2 + 8D_y + D^2 - 4D = -56 \iff$

$D_x^2 - 2\cdot 6\cdot D_x + 6^2 + D_y^2 + 2\cdot 4\cdot D_y + 4^2 + D^2 - 2\cdot 2\cdot D + 2^2 =$
$6^2 + 4^2 + 2^2 - 56 \iff$

$(D_x - 6)^2 + \left(D_y + 4\right)^2 + (D - 2)^2 = 0 \iff$

$D_x - 6 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ D_y + 4 = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ D - 2 = 0 \iff$

$D_x = 6$, $D_y = -4$ και $D = 2$

Αφού είναι $D = 2 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{2} = 3 \ , \quad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{4}{2} = -2$$

Άσκηση 11

Να λυθεί με 2 τρόπους το σύστημα: $\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 5x+y-2\omega=33 \end{cases}$

Λύση

Α΄ τρόπος: Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε την 1η ως προς ω και αντικαθιστούμε το ω στις άλλες δύο εξισώσεις.

$$\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 5x+y-2\omega=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ 2x-5y-2(3x-2y-11)=3 \\ 5x+y-2(3x-2y-11)=33 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ 2x-5y-6x+4y+22=3 \\ 5x+y-6x+4y+22=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ -4x-y=-19 \\ -x+5y=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=-4x+19 \\ -x+5(-4x+19)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=-4x+19 \\ -x-20x+95=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=-4x+19 \\ -21x=-84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=-4x+19 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=-4\cdot 4+19 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega=3x-2y-11 \\ y=3 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega = 3\cdot 4 - 2\cdot 3 - 11 = 12 - 6 - 11 = -5 \\ y = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι: $\boldsymbol{(x, y, \omega) = (4, 3, -5)}$.

Β' τρόπος: Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Κρατάμε σταθερή μία από τις τρεις εξισώσεις .

Θεωρούμε αυτήν με τη δεύτερη ως σύστημα και διώχνουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τον ένα άγνωστο, και αυτήν με την τρίτη πάλι ως σύστημα και διώχνουμε τον ίδιο άγνωστο.

$$\begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \end{cases} \left|\begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 4y + 2\omega = -22 \\ 6x - 15y - 6\omega = 9 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $-11y - 4\omega = -13 \Leftrightarrow$

$11y + 4\omega = 13 \quad (1)$

$$\begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} \left|\begin{matrix} \cdot(-5) \\ \cdot 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} -15x + 10y + 5\omega = -55 \\ 15x + 3y - 6\omega = 99 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $13y - \omega = 44 \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2):

$$\begin{cases} 11y + 4\omega = 13 \\ 13y - \omega = 44 \end{cases} \left|\begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 11y + 4\omega = 13 \\ 52y - 4\omega = 176 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $63y = 189 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 3}$.

$$\begin{cases} y = 3 \\ 13\cdot 3 - \omega = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \omega = 39 - 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 3} \\ \boldsymbol{\omega = -5} \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην $3x - 2y - \omega = 11$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 3x - 2 \cdot 3 - (-5) = 11 \\ y = 3 \\ \omega = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 11 + 6 - 5 \\ y = 3 \\ \omega = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ y = 3 \\ \omega = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 4} \\ \boldsymbol{y = 3} \\ \boldsymbol{\omega = -5} \end{cases}$$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{-5})$.

Άσκηση 12

Να λυθεί με δύο τρόπους το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y + \omega = 1 \\ 2x - y - 3\omega = 2 \\ 3x - 3y - 2\omega = 4 \end{cases}$

Λύση

Α΄ τρόπος: Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε την 1η ως προς x και αντικαθιστούμε το x στις άλλες δύο εξισώσεις.

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - \omega \\ 2(1 + 2y - \omega) - y - 3\omega = 2 \\ 3(1 + 2y - \omega) - 3y - 2\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - \omega \\ 2 + 4y - 2\omega - y - 3\omega = 2 \\ 3 + 6y - 3\omega - 3y - 2\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - \omega \\ 3y - 5\omega = 0 \\ 3y - 5\omega = 1 \end{cases}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις καταλαβαίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Β΄ τρόπος: Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Κρατάμε σταθερή μία από τις τρεις εξισώσεις .

Θεωρούμε αυτήν με τη δεύτερη ως σύστημα και διώχνουμε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τον ένα άγνωστο, και αυτήν με την τρίτη πάλι ως σύστημα και διώχνουμε τον ίδιο άγνωστο.

$$\begin{cases} x-2y+\omega=1 \\ 2x-y-3\omega=2 \\ 3x-3y-2\omega=4 \end{cases}$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} x-2y+\omega=1 \\ 2x-y-3\omega=2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y-2\omega=-2 \\ 2x-y-3\omega=2 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $3y-5\omega=0 \quad (1)$

$$\begin{cases} x-2y+\omega=1 \\ 3x-3y-2\omega=4 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6y-3\omega=-3 \\ 3x-3y-2\omega=4 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $3y-5\omega=0 \quad (2)$

Από (1) , (2) έχουμε:

$$\begin{cases} 3y-5\omega=0 \\ 3y-5\omega=4 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+5\omega=0 \\ 3y-5\omega=4 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $0y+0\omega=4$ που είναι αδύνατη, άρα αδύνατο είναι και το σύστημα.

Άσκηση 13

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}$

Λύση

Στο σύστημα αυτό, μπορούμε να προσθέσουμε όλες ή μερικές από τις εξισώσεις του συστήματος και με αντικατάσταση να βρούμε ευκολότερα τη λύση του δοσμένου συστήματος.

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ y + z = 2 & (2) \\ z + x = 3 & (3) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) και έχουμε: $2x + 2y + 2z = 6 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 3 \quad (4)$

Από τις σχέσεις (1) και (4) έχουμε:

$$1 + z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - 1 \Leftrightarrow z = 2$$

Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$x + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 - 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$y + 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 - 3 \Leftrightarrow y = 0$$

Άσκηση 14

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = -2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 9 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = -2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = -2 \\ 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} = 9 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Αρχικά, πρέπει να βάλουμε περιορισμούς. Πρέπει $x \neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad y \neq 0$.

Επειδή εμφανίζονται οι ίδιοι άγνωστοι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση και να το μετατρέψουμε σε γραμμικό. Θέτουμε λοιπόν: $\kappa = \frac{1}{x} \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda = \frac{1}{y}$ και το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} 4\kappa + 2\lambda = -2 \\ 2\kappa + 3\lambda = 9 \end{cases}$ το οποίο μπορούμε να το λύσουμε με όποιο τρόπο θέλουμε. Εδώ θα το λύσουμε με αντίθετους συντελεστές.

$$\begin{cases} 4\kappa + 2\lambda = -2 \\ 2\kappa + 3\lambda = 9 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot 2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -4\kappa - 2\lambda = 2 \\ 4\kappa + 6\lambda = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\lambda = 20 \\ 2\kappa + 3\lambda = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ 2\kappa + 3 \cdot 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ 2\kappa = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 5 \\ \kappa = -3 \end{cases}$$

Είναι: $\kappa = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -3 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$

$$\lambda = \frac{1}{y} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow 5y = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{5}}$$

Άσκηση 15

Ένας μαθητής απάντησε σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 4 μονάδες, ενώ για κάθε λανθασμένη του αφαιρούνταν δυο μονάδες. Αν συνολικά συγκέντρωσε 50 μονάδες, σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

Λύση

Έχουμε 2 αγνώστους άρα θέλουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους.

Έστω ότι απάντησε σε x ερωτήσεις σωστά και σε y ερωτήσεις λανθασμένα. Φυσικά πρέπει $x,\ y \geq 0$.

Συνολικά οι ερωτήσεις είναι 20 οπότε $x + y = 20$.

Η 1 σωστή παίρνει 4 μονάδες άρα οι x σωστές παίρνουν $4x$ μονάδες. Για τη 1 λανθασμένη αφαιρούνται 2 μονάδες άρα για τις y λανθασμένες αφαιρούνται $2y$ μονάδες. Έτσι, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x - 2y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x - 2y = 50 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ 4x - 2y = 50 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\begin{cases} 6x = 90 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ 15 + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases}$$

Άρα, απάντησε σωστά σε **15** ερωτήσεις και λάθος σε **5** ερωτήσεις.

Άσκηση 16

Ένα ξενοδοχείο έχει 30 δωμάτια, δίκλινα και τρίκλινα, και μπορεί να φιλοξενήσει μέχρι και 80 άτομα. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

Λύση

Έστω ότι το ξενοδοχείο έχει x δίκλινα και y τρίκλινα. $(x,\ y > 0)$

Προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 3y = 80 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -60 \\ 2x + 3y = 80 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\begin{cases} y = 20 \\ x + y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 10 \end{cases}$$

Άρα, το ξενοδοχείο έχει $\mathbf{10}$ δίκλινα και $\mathbf{20}$ τρίκλινα.

Άσκηση 17

Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και ο Ανέστης θέλουν να αγοράσουν με τα χρήματα τους ένα δώρο για τη Μαριάννα. Τα χρήματα του Δημήτρη και του Γιώργου μαζί είναι κατά 20€ περισσότερα από τα χρήματα του Ανέστη. Τα χρήματα του Γιώργου και του Ανέστη είναι κατά 60€ περισσότερα από τα χρήματα του Δημήτρη και τέλος τα χρήματα του Δημήτρη και του Ανέστη είναι κατά 40€ περισσότερα από τα χρήματα του Γιώργου. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας; Πόσο κοστίζει το δώρο της Μαριάννας;

Λύση

Έστω ότι ο Δημήτρης έχει x €, ο Γιώργος έχει y € ο Ανέστης ω €.

Πρέπει: $x, y, \omega > 0$.

Αφού τα χρήματα του Δημήτρη και του Γιώργου είναι κατά 20 € περισσότερα από αυτά του Ανέστη προκύπτει η εξίσωση:

$$x + y = \omega + 30 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - \omega = 30 \quad (1)$$

Αφού τα χρήματα του Γιώργου και του Ανέστη είναι κατά 60€ περισσότερα από τα χρήματα του Δημήτρη, προκύπτει η εξίσωση:

$$y + \omega = x + 60 \quad \Leftrightarrow \quad -x + y + \omega = 60 \quad (2)$$

Αφού τα χρήματα του Δημήτρη και του Ανέστη είναι κατά 40€ περισσότερα από τα χρήματα του Γιώργου, προκύπτει η εξίσωση:

$$x + \omega = y + 40 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + \omega = 40 \quad (3)$$

Οπότε, λύνουμε το σύστημα των (1), (2), (3):

$$\begin{cases} x+y-\omega=30 \\ -x+y+\omega=60 \\ x-y+\omega=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-\omega=30 \\ -x+y+\omega=60 \end{cases} \overset{(+)}{\widehat{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2y=90 \\ x+y-\omega=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=45\ € \\ x-\omega=-15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-\omega=30 \\ x-y+\omega=40 \end{cases} \overset{(+)}{\widehat{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2x=70 \\ x+y-\omega=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=35\ € \\ y-\omega=-5 \end{cases}$$

$$x+y-\omega=30 \Leftrightarrow 35+45-\omega=30 \Leftrightarrow 80-\omega=30$$

$$\Leftrightarrow \omega=50\ €$$

Έτσι, ο Δημήτρης έχει 35 €, ο Γιώργος 45 € και ο Ανέστης 50 €. Το δώρο κόστιζε $35+45+50=130$ €.