ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δίνονται οι παρακάτω εξισώσεις. Ποιες παριστάνουν πάντοτε ευθεία ή ευθείες και ποιες δεν παριστάνουν;

i. $|x-3y|=0$
ii. $\alpha x+\beta y=\gamma$
iii. $\alpha x+(\alpha-1)y=2$
iv. $\lambda x+(\lambda^2-\lambda)y=5$
v. $\frac{y}{x-1}=2$
vi. $x^2-2xy=-y^2$
vii. $y^2-x^2=0$
viii. $x^2-xy=0$
ix. $x^2+y^2=0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟΥ– ΛΑΘΟΥΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος(Λ).

1. Η εξίσωση $3y=7$ παριστάνει ευθεία.

2. Η εξίσωση $2x=10$ παριστάνει ευθεία.

3. Η εξίσωση $\frac{\alpha}{x} + \beta y = \gamma$ είναι γραμμική.

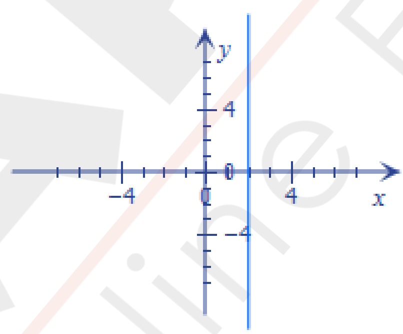
4. Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει ευθεία.

5. Η εξίσωση $0x + 0y = 6$ παριστάνει ευθεία.

6. Η εξίσωση $0x + 0y = 0$ παριστάνει ευθεία.

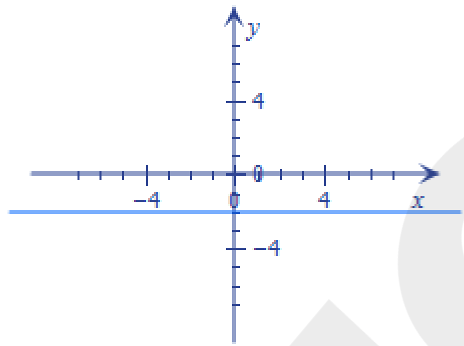
7. Οι ευθείες $x = \kappa$ και $y = \lambda$ είναι κάθετες.

8. Η ευθεία $x = \kappa$ είναι γραφική παράσταση συνάρτηση.

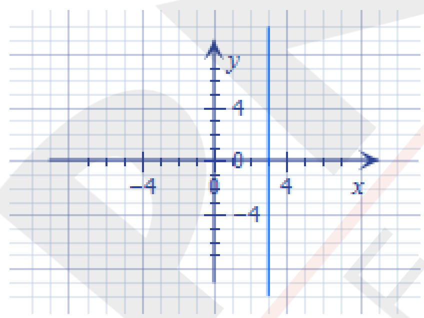


9. Η ευθεία $3x - y = 4$ επαληθεύεται από το σημείο $(2,2)$.

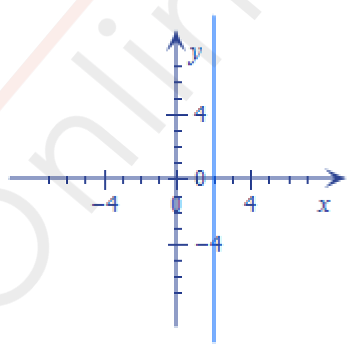
10. Η ευθεία $y = -2$ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.



11. Η ευθεία $x = 3$ διέρχεται από το σημείο $(-3,3)$.



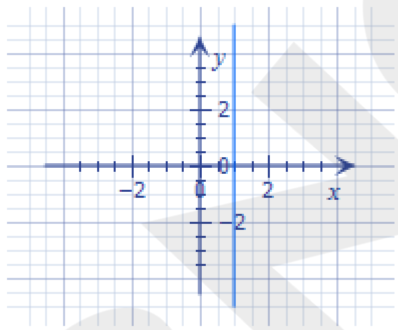
12. Η ευθεία $x = 2$ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.



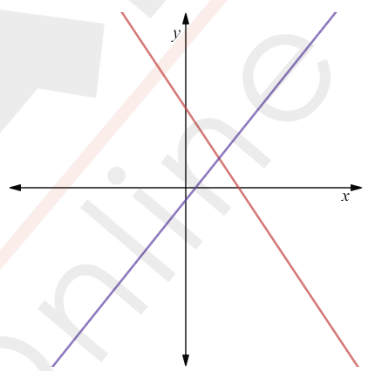
13. Η εξίσωση $x = x_o$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.

14. Η εξίσωση $y = y_o$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$.

15. Ηεξίσωση $x = 1$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(1, y)$, $y \epsilon \mathbb{R}$.



16. Έστω (Σ) το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) τέμνονται, τότε το (Σ)έχει μοναδική λύση.



17. Έστω (Σ) το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.Αν το (Σ) έχει δύο λύσεις , τότε έχει άπειρες λύσεις.

18. Έστω (Σ) το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.Αν το(Σ)είναι αδύνατο, τότε οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του(Σ)ταυτίζονται.

19. Έστω (Σ) το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.Αν το (Σ) έχει ως λύση το ζεύγος $(0{,}0)$, τότε οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ)είναι μηδέν.

20. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}(\Sigma)$. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε $D=0$.

21. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}(\Sigma)$. Αν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

22. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}(\Sigma)$. Αν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε $D=0$.

23. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

24. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε $|D| > 0$.

25. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν $D^3 + D^2 - 3 = 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

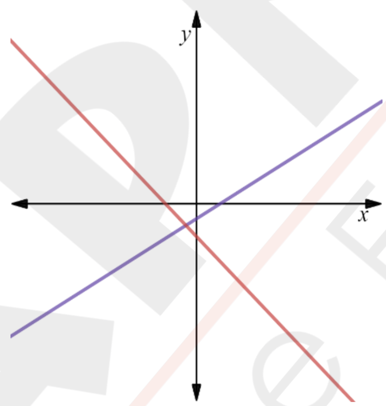
26. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε είναι αδύνατο.

27. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν το σύστημα δεν έχει άπειρες λύσεις, τότε είναι αδύνατο.

28. Η ορίζουσα είναι πραγματικός αριθμός.

29. Έστω το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ (Σ). Αν $D \neq 0$ τότε οι ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις εξισώσεις είναι παράλληλες.

30. Έστω ότι οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν τις ευθείες ε και ε'. Αν $D \neq 0$, τότε οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$ τέμνονται.

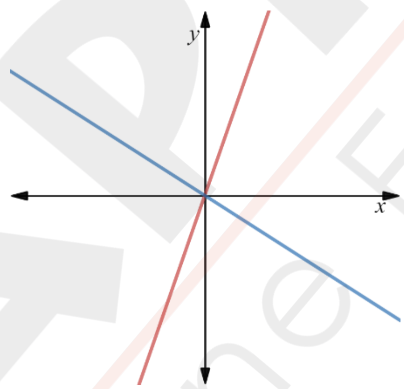


31. Έστω ότι οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν τις ευθείες ε και ε'. Αν οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$ είναι παράλληλες, τότε $D = 0$.

32. Έστω ότι οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν τις ευθείες ε και ε'. Αν $D = 0$, τότε οι $\varepsilon, \varepsilon'$ δεν τέμνονται.

33. Έστω ότι οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν τις ευθείες ε και ε'. Αν $D = 0$, τότε οι $\varepsilon, \varepsilon'$ είναι παράλληλες.

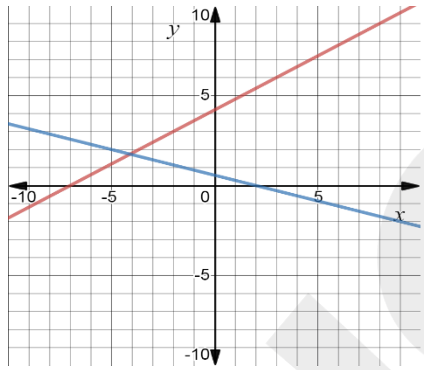
34. Το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$ έχει πάντα λύση.



35. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση $(0,2)$.

36. Η εξίσωση $\frac{3}{x} + 4y = -7$ είναι γραμμική.

37. Το ζεύγος $(-2{,}3)$ είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x-5y=-21 \\ 2x+7y=4 \end{cases}$.

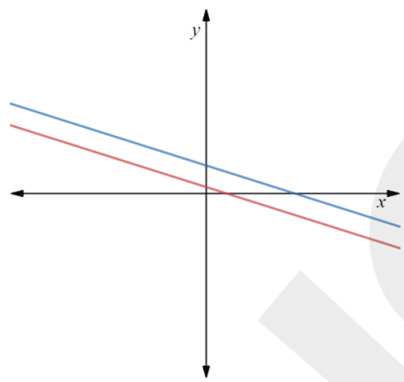


38. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

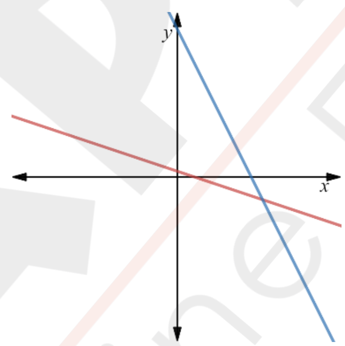
39. Το σύστημα $\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

40. Οι ευθείες του συστήματος $\begin{cases} x+3y=10 \\ 4x-2y=12 \end{cases}$ τέμνονται σε ένα σημείο.

41. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις ενός συστήματος είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο.



42. Αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μοναδική λύση.



43. Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα, αν έχουν ένα κοινό ζεύγος λύσεων.

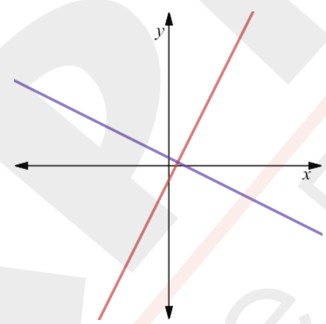
44. Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα όταν κάποιες από τις λύσεις τους είναι κοινές.

45. Λύση ενός συστήματος είναι ένα ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία από τις δύο εξισώσεις.

46. Οι ευθείες $x-3y=4$ και $2x-6y=8$ ταυτίζονται.

47. Αν το σύστημα $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-\lambda y=21 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, τότε $\lambda=3$.

48. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-\beta y=\alpha \\ \beta x+2y=\gamma \end{cases}$ έχει πάντα λύση.



49. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

50. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $D = 0 = D_x$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

51. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Τα ομογενή συστήματα έχουν πάντα $D_x = D_y = 0$.

52. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $D = D_x = D_y \neq 0$ τότε έχει μοναδική λύση την $(1,1)$.

53. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $D^2 + \left(D_y - 2\right)^2 = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

54. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $(D-1)^2 + (2D-2)^2 = 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση.

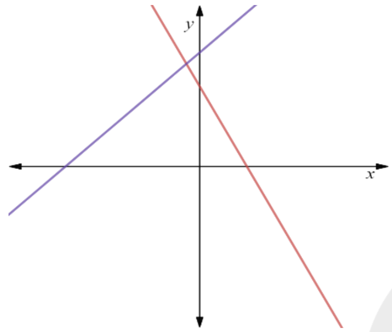
55. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του. Αν $D^2 + |D_x - 5| = 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

56. Έστω ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του.Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

57. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση τότε είναι αδύνατο.

58. Αν $\alpha', \beta' \neq 0$ και η ορίζουσα του συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ είναι 0, τότε: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$.

59. Το σύστημα $\begin{cases} 2x + \lambda y = 5 \\ -\lambda x + y = 7\lambda \end{cases}$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό λ.



60. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - 6y = 15 \\ 4x + \mu y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις τότε: $\lambda + \mu = \frac{81}{2}$.

61. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y ισχύει $2{D_x}^2 - 2D_x D_y + {D_y}^2 = 0$, τότε $x = y = 0$.

62. Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y - 3\omega = 0 \\ 3x - 2y + 4\omega = 5 \\ 2x + y - \omega = 2 \end{cases}$ έχει λύση $(1,1,1)$.

63. Το σύστημα $\begin{cases} x + y = 10 \\ y + \omega = 10 \\ \omega + x = 10 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

64. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 13$ παριστάνει ευθεία.

65. Μία εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ λέγεται γραμμική εξίσωση που παριστάνει μία ευθεία γραμμή.

66. Το ζεύγος (x_o, y_o) είναι λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ αν και μόνο αν $\alpha x_o + \beta y_o = \gamma = 0$.

67. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha \neq \beta$ και $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία γραμμή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ

Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3, y)$, $y \epsilon \mathbb{R}$είναι η ευθεία ____________.

2. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, 2)$, $x \epsilon \mathbb{R}$ είναι η ευθεία ____________.

3. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, x-2)$, $x\epsilon\mathbb{R}$είναι η ευθεία

___________.

4. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(0, y)$, $y\epsilon\mathbb{R}$είναι ο άξονας

___________.

5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, 0)$, $x\epsilon\mathbb{R}$ είναι ο άξονας

___________.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Το σύστημα $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x-3y=11 \end{cases}$έχει:

i. μία λύση.

ii. καμία λύση.

iii. άπειρες λύσεις.

iv. δύο λύσεις.

2. Οι ευθείες $y-x=1$και $x+y=1$τέμνονται στο σημείο:

i. $(0,-1)$

ii. $(-1,0)$

iii. $(0,1)$

iv. $(0,0)$

3. Οι ευθείες $x = 1$και $y = -3$τέμνονται στο σημείο:

i. $(1,0)$ iii. $(1,-3)$

ii. $(0,-3)$ iv. $(-3,1)$

4. Μία λύση του συστήματος $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$είναι το ζεύγος:

i. $(-2,3)$ iii. $(-3,6)$

ii. $(-1,-2)$ iv. $(1,-0{,}5)$

5. Η ευθεία $-3x = 9$τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο:

i. $(0,3)$ iii. $(0,-3)$

ii. $(3,0)$ iv. $(-3,0)$

6. Αν οι ευθείες $y = 9$και $y = 3x + \kappa$ τέμνονται στο σημείο $A(1,9)$ το κ ισούται με:

i. 1 iii. 6

ii. 9 iv. 3

7. Το σύστημα $\begin{cases} x+5y=0 \\ x-4y=0 \end{cases}$ έχει:

i. καμία λύση.

ii. άπειρες λύσεις.

iii. μία λύση, τη $(0{,}0)$.

iv. δύο λύσεις.

8. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2{,}8)$ και $B(-1{,}11)$ είναι η:

i. $y = x + 10$

ii. $x = -1$

iii. $y = 8$

iv. $y = -x + 10$

9. Αν $\lambda\nu \neq 0$ η ισότητα $\begin{vmatrix} \kappa & \mu \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} = 0$ είναι ισοδύναμη με:

i. $\kappa\mu = \lambda\nu$

ii. $\frac{\kappa}{\nu} = \frac{\mu}{\lambda}$

iii. $\kappa\lambda = \mu\nu$

iv. $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$

10. Το σύστημα $\begin{cases} 3x+\alpha y=6 \\ x+y=8 \end{cases}$ είναι αδύνατο όταν ο α είναι:

i. -3

ii. -1

iii. 0

iv. 3

11. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + 3y = -9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ επαληθεύεται για ζεύγη τιμών των x, y, τότε το α ισούται με:

i. -6

ii. -5

iii. -4

iv. -3

12. Αν το σύστημα $\begin{cases} 4x + 2\alpha y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ είναι αδύνατο, τότε το $\begin{cases} x + y = -1 \\ \alpha x + 3y = 3 \end{cases}$:

i. είναι αδύνατο.

ii. έχει άπειρες λύσεις.

iii. έχει λύση την $(-2{,}1)$.

iv. δεν ξέρουμε.

13. Αν $D_x + D_y = D$, $D \neq 0$και $x = y$, τότε η λύση του συστήματα είναι:

i. $(0{,}0)$

ii. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

iii. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

iv. $(-1, -1)$

14. Αν $3D_x = D$, $D_y = \frac{4}{3}D$ και $D \neq 0$, τότε η λύση του συστήματος είναι:

i. $\left(3, \frac{4}{3}\right)$

ii. $\left(-3, -\frac{4}{3}\right)$

iii. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

iv. $(0,0)$

15. Αν ισχύει $D^2 + {D_x}^2 + {D_y}^2 = 0$, τότε το σύστημα:

i. είναι αδύνατο.

ii. έχει μία λύση.

iii. έχει άπειρες λύσεις.

iv. δεν γνωρίζουμε.

16. Αν $\frac{5}{D} \in \mathbb{R}$ τότε το σύστημα:

i. έχει άπειρες λύσεις.

ii. είναι αδύνατο.

iii. έχει μοναδική λύση.

17. Αν $D^4 + \left(D_y - 2\right)^2 = 0$ τότε το σύστημα:

i. έχει άπειρες λύσεις.

ii. είναι αδύνατο.

iii. έχει μοναδική λύση.

18. Αν $D = 0$και $|D_x| + |D_y| = 0$ τότε το σύστημα:

i. έχει άπειρες λύσεις.

iii. έχει μοναδική λύση.

ii. είναι αδύνατο.

19. Αν $|D-3| + |D_y+6| + |D_x-9| = 0$τότε το σύστημα:

i. έχει άπειρες λύσεις.

ii. είναι αδύνατο.

iii. έχει μοναδική λύση την $(x,y) = (3,-2)$.

iv. έχει μοναδική λύση την $(x,y) = (3,2)$.

20. Η ανίσωση $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 4 & x \end{vmatrix} > 10$αληθεύει για:

i. $x = -6$

iii. $x = -4$

ii. $x = -5$

iv. $x = -3$

21. Αν το σύστημα $\begin{cases} -3x + 2y = \alpha \\ 6x - 4y = \kappa\alpha \end{cases}$, $\kappa, \alpha \epsilon \mathbb{R}^*$ έχει άπειρες λύσεις, το κ παίρνει μία από τις τιμές:

i. 0

iii. 2

ii. 1

iv. -2

22. Αν για το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = -1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 0 \end{cases}$ είναι $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$ και $\alpha_2 \neq \beta_2$, τότε:

i. το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική λύση $(0,0)$.

ii. το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και τη μηδενική.

iii. το σύστημα είναι αδύνατο.

iv. το σύστημα έχει μία μοναδική λύση, διαφορετική της μηδενικής.

23. Αν $D^2 + |D_x - 3| = 0$τότε για το σύστημα ισχύει:

i. έχει άπειρες λύσεις.

ii. είναι αδύνατο.

iii. έχει λύση το ζεύγος $(3,0)$.

iv. έχει λύση το ζεύγος $(-3,0)$.

24. Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x - y = 0 \\ x + \alpha y = 0 \end{cases}$:

i. έχει λύση$(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)$.

ii. έχει λύση μόνο την $(x, y) = (0,0)$.

iii. άπειρες λύσεις.

iv. είναι αδύνατο.

25. Ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις δίνει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

i. $5x - 7y = 1$ή $3x + y = 0$

ii. $(x - 2y)(3x + y) = 0$

iii. Αν $x - 3y = 5$τότε $2x - 4y = 10$

iv. $x - 2y = 8$και $-2x + 8y = 20$