Η έννοια του διανύσματος - Μεθοδολογία & Λυμένες Ασκήσεις

Στόχος 1 : Να αποδεικνύουν μια διανυσματική ισότητα.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{B\Lambda} - \overrightarrow{AK}$ να δείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ και Δ ισχύει : $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 1

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ζητείται να δείξουμε ότι δύο σημεία M και N ταυτίζονται.
Διαδικασία
1. Δείχνουμε ότι $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. 2. Δείχνουμε ότι $\|\overrightarrow{MN}\| = 0$. 3. Θεωρώντας σημείο αναφοράς O δείχνουμε ότι $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{B\Lambda} - \overrightarrow{AK}$ να δείξετε ότι τα σημεία A *και* B ταυτίζονται.

Λύση

$\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{B\Lambda} - \overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{B\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Lambda} = \overrightarrow{B\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda A} = \overrightarrow{\Lambda B} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\Lambda A} = \overrightarrow{\Lambda B} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Lambda A} - \overrightarrow{\Lambda B} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Δηλαδή, τα A *και* B ταυτίζονται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1ου ΣΤΟΧΟΥ – ΜΟΡΦΗ 2

Δεδομένο - Ζητούμενο
Απόδειξη διανυσματικής ισότητας
Διαδικασία
Για να αποδείξουμε μια διανυσματική ισότητα εργαζόμαστε με κάποιον από τους παρακάτω τρόπους : α) Μεταφέρουμε τα διανύσματα στο ίδιο μέλος, κάνουμε τις πράξεις και καταλήγουμε σε μια σχέση που ισχύει και είναι ισοδύναμη της αρχικής. β) Με τη μέθοδο των διανυσματικών ακτίνων. Δηλαδή επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς ένα σημείο Ο και γράφουμε κάθε διάνυσμα π.χ. $\overrightarrow{AB}$ σύμφωνα με τη σχέση $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Μπορούμε όμως να επιλέξουμε και ως

σημείο αναφοράς κάποιο από τα δοσμένα σημεία της άσκησης.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ και Δ ισχύει : $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B}$.

Λύση

Α΄ Τρόπος

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ισχύει.

Β΄ Τρόπος

Έστω O σημείο αναφοράς.

Θα αναλύσουμε κάθε διάνυσμα ως διαφορά δύο διανυσμάτων που έχουν κοινή αρχή το O, οπότε έχουμε :

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} - \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta}\right) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$ *Ισχύει*

Στόχος 2 : Να μπορούν να μετατρέπουν μήκη σε διανυσματική ισότητα.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

α) Αν $\overrightarrow{BM} \upuparrows \overrightarrow{M\Gamma}$, να μετατρέψετε την ισότητα $(BM) = 2(M\Gamma)$ σε διανυσματική.

α) Αν $\overrightarrow{BM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M\Gamma}$, να μετατρέψετε την ισότητα $(BM) = 2(M\Gamma)$ σε διανυσματική.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Μετατροπή ισότητας μηκών σε διανυσματική ισότητα.
Διαδικασία
Για να μετατραπεί μια ισότητα μηκών σε διανυσματική ισότητα, πρέπει να γνωρίζουμε αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα. Κάθε ισότητα μηκών γίνεται διανυσματική, **όπως είναι**, αν τα διανύσματα είναι **ομόρροπα**, ενώ βάζουμε ένα **πλην (-)**, αν τα διανύσματα είναι **αντίρροπα**. Ισχύει και αντίστροφα.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

α) Αν $\overrightarrow{BM} \upuparrows \overrightarrow{M\Gamma}$, να μετατρέψετε την ισότητα $(BM) = 2(M\Gamma)$ σε διανυσματική.

α) Αν $\overrightarrow{BM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M\Gamma}$, να μετατρέψετε την ισότητα $(BM) = 2(M\Gamma)$ σε διανυσματική.

Λύση

α) Αν $(BM) = 2(M\Gamma)$ και $\overrightarrow{BM} \upuparrows \overrightarrow{M\Gamma}$, τότε $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{M\Gamma}$.

β) Αν $(BM) = 2(M\Gamma)$ και $\overrightarrow{BM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M\Gamma}$, τότε $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{M\Gamma}$.

Στόχος 3 : Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο.

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν A, B, Γ *και* Δ είναι μη συνευθειακά σημεία και ισχύει ότι :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{\Delta M}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ κατά ίσα τμήματα BE και ΔZ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο

Απόδειξη ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο.

Διαδικασία

α) **Παραλληλόγραμμο** : Όταν δίνεται μια διανυσματική ισότητα, στην οποία περιέχονται τέσσερα μη συνευθειακά σημεία $A, B, \Gamma \text{ και } \Delta$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα που ορίζονται από τις απέναντι πλευρές του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

Δεν ξεχνάμε ότι ισχύει και ο κανόνας του παραλληλογράμμου στην πρόσθεση διανυσμάτων, δηλαδή, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει και $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Delta B}$ από την αφαίρεση διανυσμάτων.

Για να δείξουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι κάποιο άλλο είδος παραλληλογράμμου (ορθογώνιο, ρόμβος κλπ.) δείχνουμε επιπλέον κάποια ιδιότητά του.

β) **Τραπέζιο** : Για να αποδείξουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, αρκεί να δείξουμε ότι δύο διανύσματα που ορίζονται από δύο απέναντι πλευρές είναι μεταξύ τους παράλληλα π.χ. $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν A, B, Γ και Δ είναι μη συνευθειακά σημεία και ισχύει ότι :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{\Delta M}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το A και έχουμε :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{\Delta M} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow$$

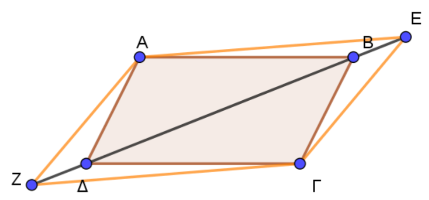
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = -\overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$$

$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$ άρα : $(B\Gamma) =//(A\Delta)$, επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ κατά ίσα τμήματα BE και ΔZ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{Z\Gamma}$.

Είναι : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{Z\Delta} = \overrightarrow{Z\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{Z\Gamma}$.

Άρα, το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στόχος 4 : Να μπορούν να αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις μέτρων

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$, να αποδείξετε ότι :

$$1 \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 7$$

Άσκηση 2

Αν ισχύουν : $|\vec{\alpha}| = \frac{3}{5}$, $|\vec{\beta}| = \frac{7}{5}$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 2 \quad (1)$,

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Άσκηση 3

Αν ισχύει $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 3$ και $|\overrightarrow{O\Gamma}| = 1$, να δείξετε ότι :

$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{\Gamma O}| \leq 6$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ανισοτικές σχέσεις
Διαδικασία
Χρησιμοποιώντας την ανισοτική σχέση των μέτρων : $\left\|\|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\|\right\| \leq \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$, μπορούμε να αποδείξουμε ανισοτικές σχέσεις μέτρων (μονές ή διπλές), οι οποίες ζητούνται σε ασκήσεις. Αν ζητείται να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}\ και\ \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, δείχνουμε τη δεξιά ισότητα της τριγωνικής ανισότητας για να είναι ομόρροπα και την αριστερή ισότητα για να είναι αντίρροπα.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$, να αποδείξετε ότι :

$1 \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 7$

Λύση

Ξέρουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα :

$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ $και$ Ξέρουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα :

$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq 3+4=7$ και

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \geq \left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \geq |3-4|=1$

Οπότε : $1 \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \leq 7$.

Άσκηση 2

Αν ισχύουν : $|\vec{\alpha}|=\frac{3}{5}$, $|\vec{\beta}|=\frac{7}{5}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq 2$ (1), να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Λύση

Ξέρουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα :

$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$. Άρα :

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq \frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{10}{5}=2 \qquad (2)$$

Ισχύει όμως και η σχέση (1): $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \geq 2$

Από (1),(2) έπεται ότι : $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ δηλαδή : $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

Άσκηση 3

Αν ισχύει $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=3$ και $|\overrightarrow{O\Gamma}|=1$, να δείξετε ότι :

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{\Gamma O}| \leq 6$.

Λύση

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{\Gamma O}| = |(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}| \leq |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{O\Gamma}| \leq$

$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{O\Gamma}|=2+3+1=6$

Στόχος 5 : Να μπορούν να βρίσκουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ικανοποιούν μια δοσμένη σχέση

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει :

$\alpha)$ $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{B\Gamma}$

β) $\overrightarrow{BM} // \overrightarrow{B\Gamma}$

Άσκηση 2

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει :

$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{\Delta A}| = |\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}|$ (1)

Άσκηση 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ για το οποίο ισχύει :

$|\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{AM}|$ (1) όπου M τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5ου ΣΤΟΧΟΥ

Δεδομένο - Ζητούμενο
Γεωμετρικοί τόποι
Διαδικασία
Όταν ζητάμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, τότε από τα δεδομένα της άσκησης προσπαθούμε να φτάσουμε σε μια από τις παρακάτω μορφές : • $\lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\rvert = \lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\rvert$, όπου A, B δύο σταθερά σημεία, οπότε ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου είναι η μεσοκάθετος του AB. • $\lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\rvert = \boldsymbol{\rho} > \mathbf{0}$, με A σταθερό σημείο, οπότε ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου είναι κύκλος κέντρου A και ακτίνας ρ. • $\boldsymbol{\rho_1} \leq \lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\rvert \leq \boldsymbol{\rho_2}$, με A σταθερό σημείο και $\rho_1, \rho_2 > 0$, οπότε ο γ.τ. των σημείων M είναι το τμήμα του επιπέδου ανάμεσα και πάνω στους δύο ομόκεντρους κύκλους (A, ρ_1) και (A, ρ_2). • $\dfrac{\lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\rvert}{\lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\rvert} = \boldsymbol{\kappa} > \mathbf{0}$, με A, B σταθερά σημεία, οπότε ο γ.τ. των σημείων Mτου επιπέδου είναι κύκλος. • $\lvert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\rvert = \mathbf{0}$, με A σταθερό σημείο, οπότε το M ταυτίζεται με το A.

- $\overrightarrow{\boldsymbol{MA}} // \overrightarrow{\boldsymbol{B\Gamma}}$, όπου A, B και Γ είναι σταθερά σημεία. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει :

α) $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{B\Gamma}$

β) $\overrightarrow{BM} // \overrightarrow{B\Gamma}$

Λύση

α) Η σχέση $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{B\Gamma}$ ισχύει όταν οι ευθείες AM και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$.

β) Οι ευθείες BM και $B\Gamma$ έχουν το B κοινό σημείο και επειδή ισχύει $\overrightarrow{BM} // \overrightarrow{B\Gamma}$, οι ευθείες συμπίπτουν. Επομένως, το M είναι σημείο της ευθείας $B\Gamma$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $B\Gamma$.

Άσκηση 2

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $α$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει :

$|\vec{MA}-\vec{ΔA}|=|\vec{AΓ}-\vec{AB}|$ (1)

Λύση

$|\vec{MA}-\vec{ΔA}|=|\vec{AΓ}-\vec{AB}| \Leftrightarrow |\vec{MA}+\vec{AΔ}|=|\vec{BΓ}|=α \Leftrightarrow |\vec{MΔ}|=α.$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου είναι ο κύκλος με κέντρο $Δ$ και ακτίνα $α$.

Άσκηση 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ για το οποίο ισχύει :

$|\vec{AΔ}+\vec{ΓA}-\vec{BM}|=|\vec{AΔ}-\vec{BΔ}-\vec{AM}|$ (1) όπου M τυχαίο σημείο του επιπέδου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M.

Λύση

$|\vec{AΔ}+\vec{ΓA}-\vec{BM}|=|\vec{AΔ}-\vec{BΔ}-\vec{AM}| \Leftrightarrow$

$|\vec{ΓA}+\vec{AΔ}-\vec{BM}|=|\vec{AΔ}-\vec{BΔ}-\vec{AM}| \Leftrightarrow$

$|\vec{ΓΔ}-\vec{BM}|=|\vec{AΔ}+\vec{ΔB}-\vec{AM}| \Leftrightarrow$

$|\vec{BA}-\vec{BM}|=|\vec{AB}-\vec{AM}| \Leftrightarrow |\vec{MA}|=|\vec{MB}|.$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB.