Οδηγία 4η

Υπολογισμός Εμβαδού περιοχής

α) Χωρίο που περικλείεται μεταξύ δύο παραβολών

π.χ. $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ g(x)=\delta x^2+\varepsilon x+\zeta$

β) Χωρίο που περικλείεται μεταξύ ευθείας και παραβολής

π.χ. $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ g(x)=\delta x+\varepsilon$

Μεθοδολογία

Βήμα 1ο Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών λύνοντας την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

Βήμα 2ο Καθορίζουμε τη σχετική θέση των δύο καμπυλών, δηλαδή ποια βρίσκεται πάνω – κάτω. Αυτό επιτυγχάνεται:

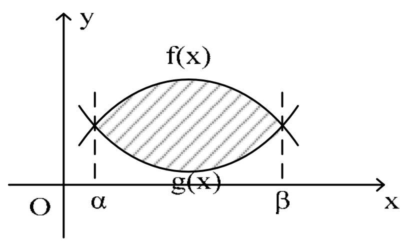
α) Με γραφική παράσταση

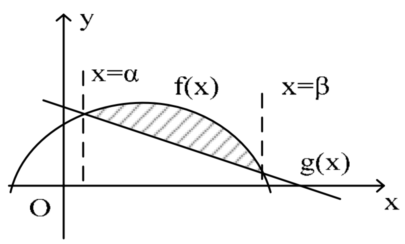
β) Εξετάζοντας το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 3ο Υπολογίζουμε το εμβαδόν της περιοχής με τη βοήθεια του τύπου

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)-g(x)\right]dx \quad \text{όπου}\quad f(x)\geq g(x)\ \text{ και }\ x=\alpha,\ x=\beta\ \text{ οι ευθείες}$$

μεταξύ των οποίων περικλείεται το χωρίο.



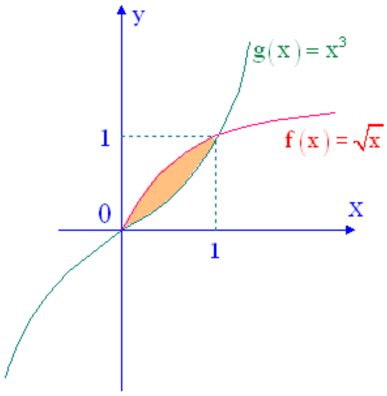


Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής του σχήματος που περιβάλλεται από τις καμπύλες $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^3$.

<u>Λύση:</u>

Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης:



$$f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=x^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$x=x^6 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^6-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x^5-1\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}}$$

Άρα έχουμε:

$$E=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^3\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E=\frac{5}{12}\text{ τ.μ.}}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων που περικλείονται:

α. Από την $f(x)=4x^2+2$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

β. Από τις $f(x)=2-x^2$ και $g(x)=x^2$

γ. Από την ευθεία $y=x+2$ και την καμπύλη $y=x^2$

δ. Από την $f(x)=x$ και $g(x)=\dfrac{x^3}{4}$ στο διάστημα $[-1,2]$.

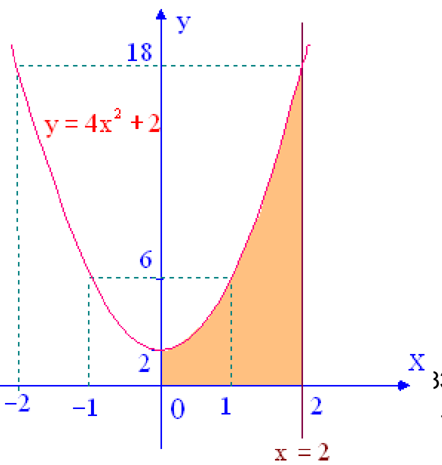
<u>Λύση:</u>

α. Παρατηρούμε ότι είναι:

$$E=\int_0^2\left(4x^2+2\right)dx=$$

$$=\left[4\cdot\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2=$$

$$=\frac{32}{3}+4 \quad \Rightarrow$$

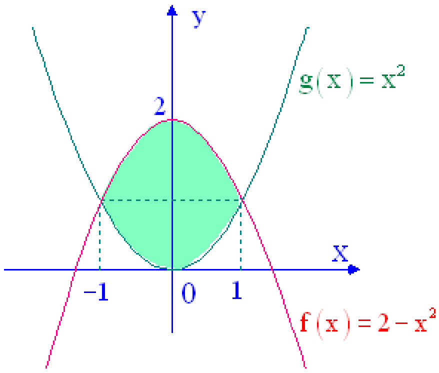


$$\boxed{E = \frac{44}{3}\text{ τ.μ.}}$$

β. Τα σημεία τομής των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow$$

$$2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$



Άρα:

$$E = \int_{-1}^{1}\left[f(x) - g(x)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2 - x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{8}{3}\text{ τ.μ}}$$

γ. Τα κοινά σημεία της ευθείας με την παραβολή, είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{matrix} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = x + 2 \\ x^2 = x + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

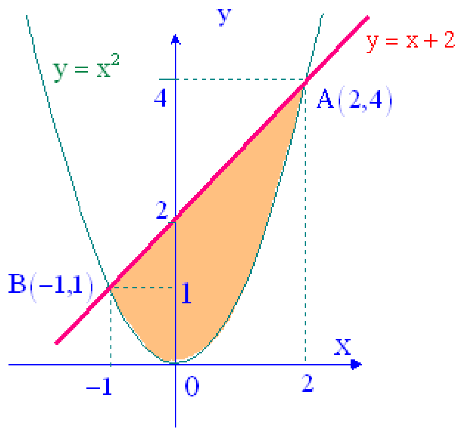
Για το τριώνυμο, έχουμε $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, επομένως οι ρίζες του είναι:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Επομένως ισοδύναμα του συστήματος (1), έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = x + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \end{matrix}} \quad \text{ή}$$

$$\left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = x + 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}}$$



Άρα τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι:

$$\boxed{A(2,4)} \quad \text{και} \quad \boxed{B(-1,1)}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι:

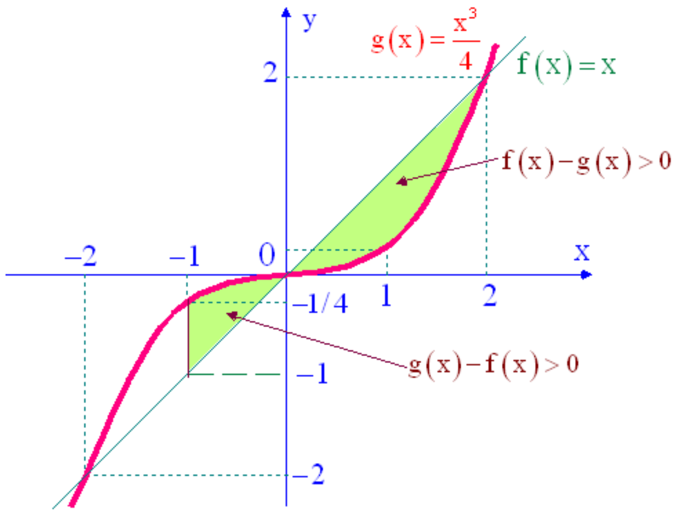
$$E=\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{E=\frac{9}{2}\text{ τ.μ.}}$$

δ. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x)-g(x)=x-\frac{x^3}{4}=x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=x\cdot\frac{4-x^2}{4}\quad\Rightarrow$$

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{4}x(2-x)(2+x)\quad(1)$$



Τα κοινά σημεία των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων, είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x)=g(x)\quad\Leftrightarrow\quad f(x)-g(x)=0\quad\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{4}x(2-x)(2+x)=0\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{\begin{array}{c}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}}$$

Συγχρόνως από την (1), με την βοήθεια του πίνακα που ακολουθεί, προσδιορίζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$, στα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν και τα οποία είναι:

$$\boxed{[-1,0]}\quad\text{και}\quad\boxed{[0,2]}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Συνέπεια των προηγουμένων παρατηρήσεων, έχουμε:

$$E=\int_{-1}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^3}{4}-x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx \quad \Rightarrow$$

$$E=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_{0}^{2}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+2-1=1+\frac{7}{16} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E=\frac{23}{16}\text{ τ.μ.}}$$