ΙΩΑΝΝΗ Π. ΚΡΟΚΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Συνοπτική θεωρία - Μεθοδολογία - Λυμένα θέματα

ΑΡΝΟΣ

Γραμμένο για φοιτητές Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι. και καθηγητές Μ. Ε.

Φροντιστηριακό e-μάθημα

ΑΕΙ-ΕΜΠ-ΤΕΙ: Με 99 ευρώ/κατηγορία
έχεις πρόσβαση σε όλα τα μαθήματά της για 4 μήνες!

Κατηγορίες: Μαθηματικά, Πληροφορική, Φυσική, Πολυτεχνικά και Οικονομικά

Μελέτη όσο, όπου και όποτε εσύ θες!

- ✓ Διδασκαλία σε βίντεο με ανάλυση της θεωρίας, μεθοδολογία, λυμένες ασκήσεις και θέματα
- ✓ Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σας απαιτήσεις
- ✓ Λυμένα θέματα εξετάσεων της σχολής σας, που εάν δε τα βρείτε, στείλτε τα μας!
- ✓ Λύνουμε τις απορίες σας online

Φροντιστηριακή e-τάξη:

On line μάθημα για τις δικές σου ξεχωριστές απαιτήσεις ατομικά ή ομαδικά.

Μαθηματικά, Πληροφορική, Φυσική, Πολυτεχνικά και Οικονομικά

Τηλεφωνήστε τώρα! 2103822495

Κεφάλαιο 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Το παρόν κεφάλαιο «φημίζεται» για το πλούσιο τυπολόγιό του. Γι αυτό η παρουσίασή του έγινε, με τέτοιο τρόπο, που ο αναγνώστης, να μαθαίνει τη βασική ιδέα (εργαλεία) για τον υπολογισμό του ζητούμενου μεγέθους στο στοιχειώδες κομμάτι, και κατόπιν να φτιάχνει όλο το τυπολόγιο μόνος του. Έτσι πετυχαίνουμε, κατά την άποψή μας, την ουσιαστική κατανόηση της εφαρμογής και την εύκολη θύμηση (δημιουργία) πολλών τύπων. Τονίζουμε ότι οι εφαρμογές είναι χρήσιμες στην γεωμετρία, τη μηχανική και τη φυσική.

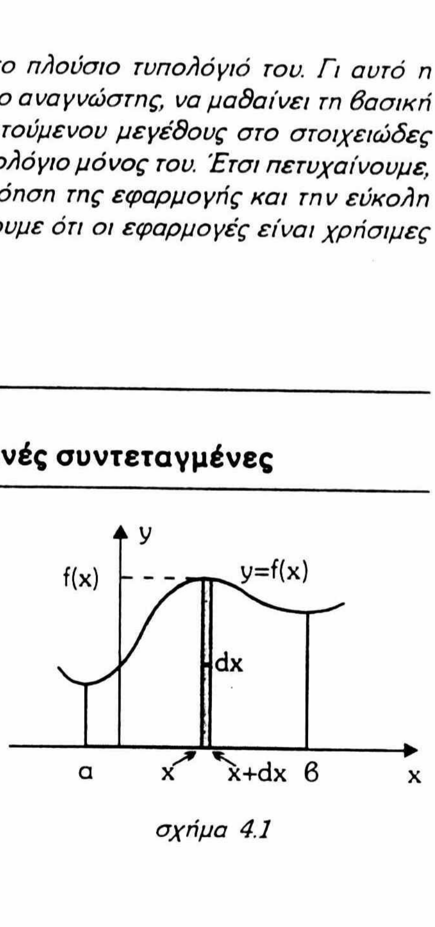
4.1 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου

4.1.1 Επίπεδο χωρίο στις καρτεσιανές συντεταγμένες

Έστω το επίπεδο χωρίο που ορίζεται από την γραμμή $y = f(x)$ με $f(x) \geq 0$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = 0$ (x- άξονα), βλέπε σχήμα 4.1.

Το εμβαδόν του στοιχειώδους κομματιού του χωρίου (στήλη - ορθογωνίου), δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{dE = f(x)\,dx} \qquad \textbf{(4.1)}$$



σχήμα 4.1

όπου: dx, το στοιχειώδες κομμάτι στον x- αξονα και

f(x), η τιμή της συνάρτησης στη θέση x.

Με άθροιση (ολοκλήρωση) όλων των εμβαδών των στοιχειωδών ορθογωνίων, από το α μέχρι το β, προκύπτει το εμβαδόν του χωρίου που περιγράψαμε πιο πάνω, δηλαδή:

$$\boxed{E=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Τονίζουμε ότι πρέπει $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$ προκειμένου να εκφράζει το ολοκλήρωμα, εμβαδόν.

➢ Όταν η καμπύλη ορίζεται στην παραμετρική μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right\} \quad \text{με } t\in[t_1,t_2]$$

το εμβαδόν δίνεται από τη σχέση:

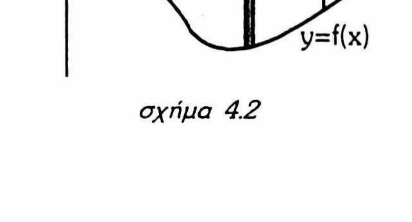
$$\boxed{E=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt} \qquad \textbf{(4.3)}$$

με την προϋπόθεση: $y(t)\geq 0$, $x'(t)\geq 0$ όταν $t\in[t_1,t_2]$.

➢ ***Προσοχή***

Όταν για την καμπύλη $y = f(x)$ έχουμε $f(x)\leq 0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $y=f(x)$, $x=\alpha$, $x=\beta$ και $y=0$ (βλέπε σχήμα 4.2), δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx} \qquad \textbf{(4.4)}$$



σχήμα 4.2

Μεθοδολογία

Εύρεση εμβαδού μεταξύ της καμπύλης $y = f(x)$ και του x- άξονα

Βήμα 1ο

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης $y=f(x)$ με τον x-άξονα, δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

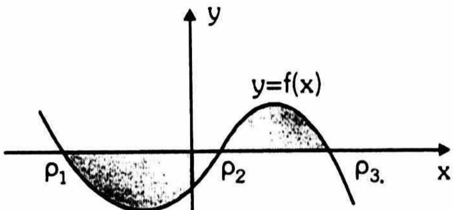
Βήμα 2ο

Μεταξύ των διαδοχικών ριζών ρ_i, ρ_{i+1} βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$, για να καθορίζουμε την σχετική θέση της καμπύλης ως προς τον x- άξονα. Τέλος ανάλογα με το πρόσημο της $f(x)$ κάνουμε χρήση των τύπων (4.2) ή (4.4).

Υπογραμμίζουμε ότι δεν είναι απαραίτητη η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ για τον υπολογισμό του εμβαδού, αλλά μόνο η γνώση της σχετικής της θέσης ως προς τον x- άξονα.

Παραδείγματος χάριν αν η $y = f(x)$ έχει τρείς ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 (βλέπε σχήμα 4.3), το εμβαδόν μεταξύ του x- άξονα και της $y = f(x)$ είναι:

$$E = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3} f(x)dx$$



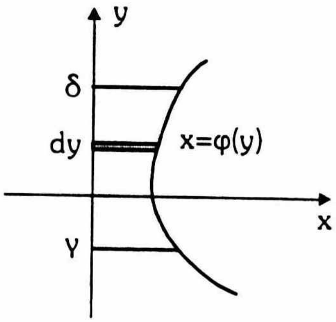
σχήμα 4.3

Παρατήρηση

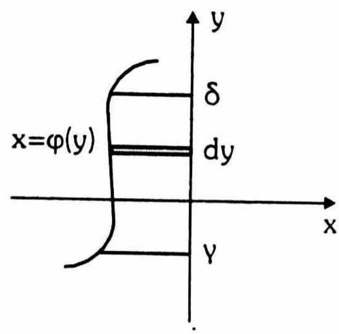
Όλες οι πιο πάνω σχέσεις μπορούν να ληφθούν και για χωρία που ορίζονται από τη γραμμή $x = \varphi(y)$ με $y \in [\gamma, \delta]$. Συγκεκριμένα:

- χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη $x = \varphi(y)$ και τις ευθείες $y = \gamma$, $y = \delta$, $x = 0$, με $\varphi(y) \geq 0$ όταν $y \in [\gamma, \delta]$, (βλέπε σχήμα 4.4.α).

$$\boxed{E = \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(y)\,dy} \qquad \textbf{(4.5)}$$



σχήμα 4.4α



σχήμα 4.4β

Για $\varphi(y) \le 0$, όταν $y \in [\gamma, \delta]$, θα έχουμε, (βλέπε σχήμα 4.4.β):

$$E = -\int_{\gamma}^{\delta} \varphi(y)\, dy$$

Έστω το επίπεδο χωρίο που ορίζεται από τις καμπύλες

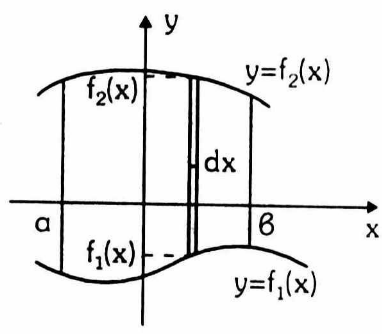
$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x)$$

με $f_2(x) \ge f_1(x)$ όταν $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες

$$x = \alpha, \qquad x = \beta$$

(βλέπε σχήμα 4.5).

Το εμβαδόν του στοιχειώδους κομματιού του χωρίου (στήλης - ορθογωνίου), δίνεται από τη σχέση:



σχήμα 4.5

$$\boxed{dE = \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx}$$

Με άθροιση (ολοκλήρωση) όλων των εμβαδών, των στοιχειωδών ορθογωνίων από το α μέχρι το β, προκύπτει το εμβαδόν του χωρίου που περιγράψαμε πιο πάνω.

Δηλαδή:

$$\boxed{E = \int_{a}^{\beta}\Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)\,dx} \qquad (4.6)$$

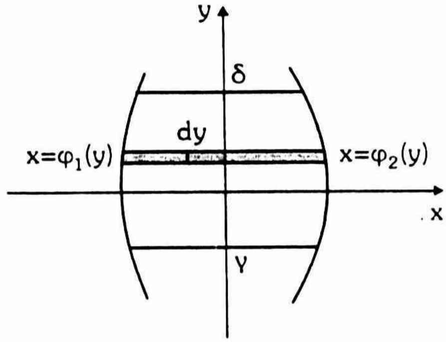
Ανάλογοι τύποι ισχύουν και στην περίπτωση που το χωρίο ορίζεται από τις

$$x=\varphi_1(y), \quad x=\varphi_2(y)$$

με $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$ όταν $y \in [\gamma, \delta]$.

Δηλαδή:

$$E = \int_{\gamma}^{\delta}\Big(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\Big)\,dy$$



σχήμα 4.6

Μεθοδολογία

Εύρεση του εμβαδού μεταξύ των καμπύλων $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$

Βήμα 1ο

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων, λύνοντας την εξίσωση

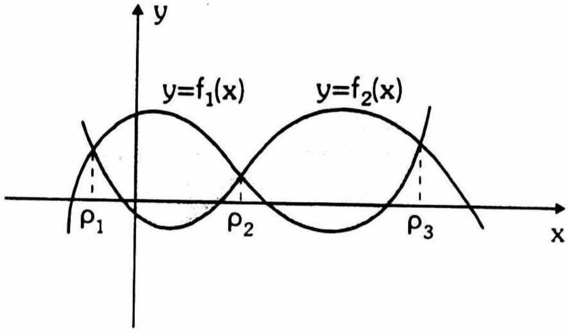
$$f_1(x) = f_2(x)$$

Βήμα 2ο

Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της πιο πάνω εξίσωσης ρ_i, ρ_{i+1} βρίσκουμε τη σχέση διάταξης των $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (ποια είναι μεγαλύτερη). Οπότε για το εμβαδόν μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής των καμπύλων θα παίρνουμε την διαφορά, πάνω καμπύλη (μεγάλη), μείον κάτω καμπύλη (μικρή).

Παραδείγματος χάριν αν οι $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ τέμνονται για $x = \rho_1$, $x = \rho_2$, $x = \rho_3$ (βλέπε σχήμα 4.7)

$$E = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)dx + \int_{\rho_2}^{\rho_3}\Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)dx$$



σχήμα 4.7

Παράδειγμα 1ο

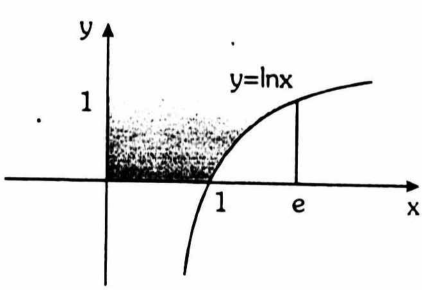
Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $y = 1$.

(Κατ. Εξετ. Τ.Ε.Ι. → Ε.Μ.Π.)

Από την γραφική παράσταση του χωρίου, παρατηρούμε ότι είναι καλύτερη η επιλογή της $x = \varphi(y)$, δηλαδή, από $y = \ln x$ έχουμε $x = e^y$ με $y \in [0,1]$.

Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_0^1 = e - 1$$



Παράδειγμα 2ο

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x(x-1)(x-2)$, και τον x- άξονα.

(Κατ. εξετ. Τ.Ε.Ι. → Χημικό)

Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της καμπύλης $y = y(x)$.

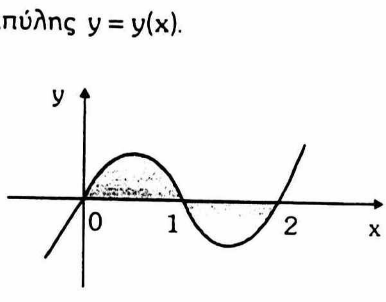
Από $y(x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$

Βρίσκουμε την σχετική θέση της καμπύλης ως προς τον x- άξονα:

$y(x) \geq 0$ όταν $x \in [0,1]$

$y(x) \leq 0$ όταν $x \in [1,2]$

(βλέπε διπλανό σχήμα)



Άρα το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^1 y(x)\,dx - \int_1^2 y(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 4x(x-1)(x-2)\,dx - \int_1^2 4x(x-1)(x-2)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 8x)dx - \int_1^2 (4x^3 - 12x^2 + 8x)dx =$$

$$= (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\Big|_0^1 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\Big|_1^2 = 2$$

Παράδειγμα 3ο

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις $y = \sin x$, $y = e^x$, $x = 0$ και $x = \pi$.

(Κατ. εξετ. Τ.Ε.Ι. → Ε.Μ.Π.)

Για $x \in [0, \pi]$ έχουμε

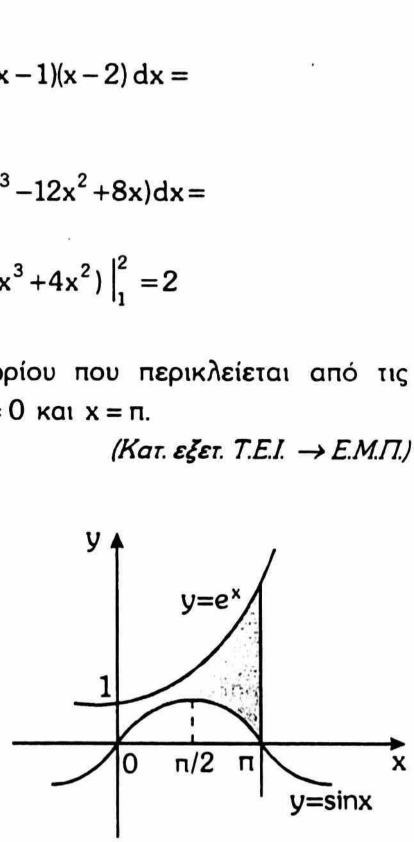
$$e^x > \sin x$$

αφού $e^x \geq 1$, για $x \geq 0$.

Οπότε από την σχετική θέση των καμπύλων το εμβαδόν είναι:

$$E = \int_0^\pi (e^x - \sin x)dx =$$

$$= (e^x + \cos x)\Big|_0^\pi = e^\pi - 3$$



Παράδειγμα 4ο

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περιλαμβάνεται μεταξύ των παραβολών $y_1 = 4x - x^2$ και $y_2 = x^2 - 3x$.

(Αρχιτ. Μηχ. Ε.Μ.Π.)

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των παραβολών.

$$y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{7}{2}$$

Στο διάστημα δύο διαδοχικών σημείων τομής των παραβολών, [0, 7/2] διαπιστώνουμε ότι η σχετική τους θέση είναι:

$$y_1(x) \geq y_2(x)$$

(αφού για $x = 1 \quad y_1(1) = 3 > y_2(1) = -2$)

Συνεπώς το εμβαδόν μεταξύ των δύο παραβολών είναι:

$$E = \int_0^{7/2} \left(y_1(x) - y_2(x)\right) dx = \int_0^{7/2} (4x - x^2 - x^2 + 3x)\, dx =$$

$$= \int_0^{7/2} (-2x^2 + 7x)\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{7/2} = \frac{7^3}{24}$$

Παράδειγμα 5ο

Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου τμήματος που ορίζεται μεταξύ της καμπύλης $y^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ και των ευθειών $x = -1/2$ και $x = 1/2$.

(Κατ. εξετ. Τ.Ε.Ι. → Ε.Μ.Π.)

Από την εξίσωση καμπύλης έχουμε:

$$y^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}} \Rightarrow y_1(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}, \quad y_2(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

Οι καμπύλες $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον x- άξονα διότι για την τιμή της τετμημένης x έχουμε αντίθετες τεταγμένες $y_1(x) = -y_2(x)$. Επίσης η συνάρτηση $y_1(x)$ είναι άρτια αφού $y_1(-x) = y_1(x)$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον y- άξονα.

Συνεπώς για το ζητούμενο εμβαδόν έχουμε:

$$E = 2\int_{-1/2}^{1/2} y_1(x)\, dx = 4\int_0^{1/2} y_1(x)\, dx = 4\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\, dx =$$

$$= 4\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \quad (\text{αφού } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x)$$

$$= -4\int_0^{1/2} \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -4\sqrt{1-x^2}\,\Bigg|_0^{1/2} = 4 - 2\sqrt{3}$$

Παράδειγμα 6ο

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (κυκλοειδής), $x=\alpha(\vartheta-\sin\vartheta)$, $y=\alpha(1-\cos\vartheta)$ όπου $\vartheta\in[0,2\pi]$ και τον άξονα των x.

(Αρχιτ. Μηχ. - Πολ. Μηχ. Ε.Μ.Π.)

Η τομή της καμπύλης, με παραμετρική μορφή, με τον x- άξονα είναι:

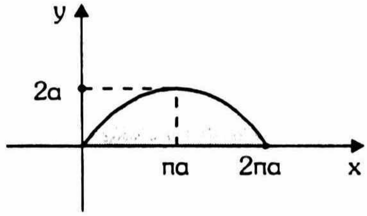
$$y(\vartheta)=0 \;\Rightarrow\; 1-\cos\vartheta=0 \;\Rightarrow\; \cos\vartheta=1 \;\Rightarrow\; \vartheta=0,\ \vartheta=2\pi$$

Για $\vartheta=0$ έχουμε

$x(0)=0$ και $y(0)=0$

Για $\vartheta=2\pi$ έχουμε

$x(2\pi)=2\pi\alpha$ και $y(0)=0$



Επίσης $y(\vartheta)\geq 0$, $x'(\vartheta)\geq 0$ όταν $\vartheta\in[0,2\pi]$.

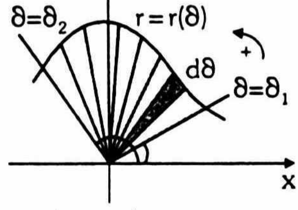
Συνεπώς το εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^{2\pi} y(\vartheta)\,x'(\vartheta)\,d\vartheta=\alpha^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\vartheta)(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta=\alpha^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\vartheta-2\cos\vartheta)\,d\vartheta=$$

$$=\alpha^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}-2\cos\vartheta\right)d\vartheta=\alpha^2\left(\frac{3}{2}\vartheta+\frac{1}{4}\sin 2\vartheta-2\sin\vartheta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi\alpha^2$$

4.1.2 Επίπεδο χωρίο σε πολικές συντεταγμένες

Έστω το επίπεδο χωρίο που ορίζεται στις πολικές συντεταγμένες από την επίπεδη καμπύλη $r=r(\vartheta)$ (βλέπε κεφάλαιο 1ο σελ. 32-36) με $r(\vartheta)\geq 0$ και τις ακτίνες για $\vartheta=\vartheta_1$, $\vartheta=\vartheta_2$ (βλ. σχήμα 4.8).



σχήμα 4.8

Ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα $r=r(\vartheta)$ έχει εμβαδόν $\pi r^2(\vartheta)$. Αντίστοιχα ένας στοιχειώδες τμήμα του (τομέας) με γωνία $d\vartheta$ θα έχει εμβαδόν

$$dE=\frac{d\vartheta}{2\pi}\pi r^2(\vartheta) \;\Rightarrow\; \boxed{dE=\frac{1}{2}r^2(\vartheta)\,d\vartheta} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Με άθροιση (ολοκλήρωση) όλων των στοιχειωδών κυκλικών τομέων βρίσκουμε το εμβαδό του χωρίου:

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\,d\theta} \qquad \textbf{(4.8)}$$

➤ Όταν το χωρίο ορίζεται μεταξύ των καμπύλων

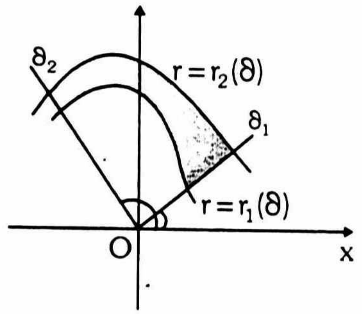
$r=r_1(\theta)$, $r=r_2(\theta)$

με $r_2(\theta)\ge r_1(\theta)$, όταν $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$

και των ακτίνων $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$

(βλέπε σχήμα 4.9), το εμβαδόν του είναι:

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right)d\theta} \qquad \textbf{(4.9)}$$



σχήμα 4.9

Παράδειγμα 1ο

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $r(\theta)=\alpha(1+\cos\theta)$ (καρδιοειδής) με $\theta\in[0,2\pi]$ και $\alpha>0$.

(Κατ. εξετ. Τ.Ε.Ι. → Ε.Μ.Π.), (Χημ. Μηχ. Ε.Μ.Π.)

✍ Όπως γράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο η καρδιοειδής καμπύλη $r(\theta)=\alpha(1+\cos\theta)$ έχει γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο σχήμα της σελίδας 35. Το εμβαδόν του χωρίου (πολικές συντεταγμένες) είναι:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\alpha^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\alpha^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=$$

$$=\alpha^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=\alpha^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=$$

$$=\alpha^2\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{2}\alpha^2$$

Παράδειγμα 2ο

Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου, που περιλαμβάνεται μεταξύ του κύκλου $x^2+y^2 \le 9/4$, της καρδιοειδούς $r \ge 1-\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ και του x-άξονα.

(Τμημ. Πολιτικών Μηχ. Ε.Μ.Π.)

Ο κύκλος $x^2+y^2 \le 9/4$ στις πολικές συντεταγμένες γράφεται:

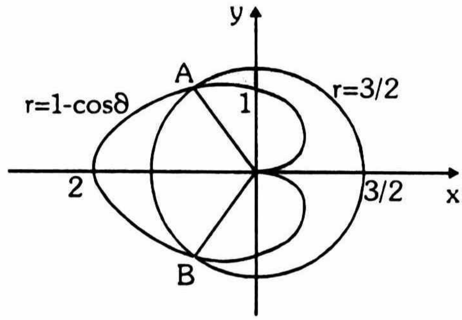
$$r^2 = 9/4 \Rightarrow \mathbf{r = 3/2}$$

Προσδιορίζουμε τα σημεία τομής του κύκλου και της καρδιοειδούς:

Όταν $r=3/2$ και $r=1-\cos\theta$

$$1-\cos\theta = 3/2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3},\ \theta_2 = \frac{-2\pi}{3}$$



σχήμα 4.10

Συνεπώς τα σημεία είναι:

$$A(\theta_1,\ r_1) = (2\pi/3,\ 3/2),\quad B(\theta_2,\ r_2) = (-2\pi/3,\ 3/2)$$

(βλέπε σχήμα 4.10)

Το εμβαδόν του ζητούμενου (γραμμοσκιασμένου) χωρίου είναι:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[(3/2)^2-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[\frac{5}{4}+2\cos\theta-\cos^2\theta\right]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}\left[\frac{5}{4}+2\cos\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}\right]d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\theta+2\sin\theta-\frac{\sin2\theta}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi/3} = \frac{\pi}{4}+\frac{5}{8}\sqrt{3}$$

Παράδειγμα 3ο

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$$

(Χημ. Μηχ. - Πολ. Μηχ. Ε.Μ.Π.)

✎ Σύμφωνα με όσα γράψαμε για τις πολικές συντεταγμένες στο 1ο κεφάλαιο (σελ. 32 - 36), στη σελίδα 36 περιγράφουμε τον Λημνίσκο του Bernoulli.
(Καλό είναι να γίνει μια γερή επανάληψη στις πολικές συντεταγμένες).

Συγκεκριμένα η δοσμένη εξίσωση στις πολικές γράφεται:

$$r(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta} \qquad \theta \in [-\pi/4,\ \pi/4] \cup [3\pi/4,\ 5\pi/4]$$

Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία του σχήματος του Λημνίσκου (σελ. 36), για το εμβαδόν έχουμε:

$$E = 2\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\,d\theta =$$

$$= a^2\,\frac{\sin 2\theta}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left[1-(-1)\right] = a^2$$

Φροντιστηριακό e-μάθημα

ΑΕΙ-ΕΜΠ-ΤΕΙ: Με 99 ευρώ/κατηγορία
έχεις πρόσβαση σε όλα τα μαθήματά της για 4 μήνες!

Κατηγορίες: Μαθηματικά, Πληροφορική, Φυσική, Πολυτεχνικά και Οικονομικά

Μελέτη όσο, όπου και όποτε εσύ θες!

- ✓ Διδασκαλία σε βίντεο με ανάλυση της θεωρίας, μεθοδολογία, λυμένες ασκήσεις και θέματα
- ✓ Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σας απαιτήσεις
- ✓ Λυμένα θέματα εξετάσεων της σχολής σας, που εάν δε τα βρείτε, στείλτε τα μας!
- ✓ Λύνουμε τις απορίες σας online

Φροντιστηριακή e-τάξη:

On line μάθημα για τις δικές σου ξεχωριστές απαιτήσεις ατομικά ή ομαδικά.

Μαθηματικά, Πληροφορική, Φυσική, Πολυτεχνικά και Οικονομικά

Τηλεφωνήστε τώρα! 2103822495

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!