Άσκηση 1.1

Έστω $\alpha \in \Re$.

i) Αν $0 \le \alpha < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Τότε $\alpha = 0$.

ii) Αν $0 \le \alpha < \frac{1}{n}$, $\forall n \in N$, τότε $a = 0$.

iii) Αν υπήρχε $n_0 \in N$ ώστε $0 \le \alpha < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \ge n_0$ τότε $a = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

i) Έστω ότι $\alpha > 0$. Τότε αν διαλέξω $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ θα έχω $0 < \alpha < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\alpha < \alpha$.

Πολλαπλασιάζοντας με το $a^{-1} > 0$ θα έχω $2 < 1$. Άτοπο.

ii) Έστω ε>0. Τότε υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Όμως $0 \le \alpha < \frac{1}{n_0}$, οπότε για τυχαίο ε>0 έχουμε $0 \le \alpha < \varepsilon$. Επομένως (από το ερώτημα (i)) α=0.

iii) Έστω $k \in N$, *k=1,2,…, n_0-1*. Τότε $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{k}$. Άρα $0 \le a < \frac{1}{k}$, *k=1,2,…, n_0-1*. Οπότε $0 \le a < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in N \overset{(II)}{\Rightarrow} a = 0$.