

ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ (2003/2004)
 (Εύρεση αθροίσματος n όρων με τη μέθοδο της επαγωγής)

Να δειχτεί επαγωγικά ότι $1+3+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Υποδειγματική Λύση

Έστω $P(n)$ η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για $n = 0$:

$$1 = (0+1)^2 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow P(1) \text{ αληθής}$$

Έστω ότι ισχύει για $n = k$:

$$1+3+\dots+(2k+1) = (k+1)^2$$

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k+1$:

(Δηλαδή ότι $1+3+\dots+(2k+1)+[2(k+1)+1] = (k+2)^2$)

$$\begin{aligned} 1+3+\dots+(2k+1)+[2(k+1)+1] &= \\ &= [1+3+\dots+(2k+1)]+[2(k+1)+1] = \\ &= (k+1)^2 + [2(k+1)+1] = \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 2 + 1 = \\ &= k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \end{aligned}$$

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει.

Άρα $P(n)$ αληθής.